Electrostatique : chapitre 1

Le champ électrique

S. FRANCO - CPES 1

Particules chargées

- Les particules élémentaires comme l'électron ou le proton possède une caractéristique appelée **charge, qui s'exprime en Coulomb (C).**
- **Charge d'un électron : -e = -1,6.10^{-19} C**
- Deux particules chargées exercent une force l'une sur l'autre. Force attractive quand la charge est de signe différent, répulsive quand elles sont de même signe.
- $\overrightarrow{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}$, avec ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide, et r la distance entre les deux particules.

La nécessité du champ

- Cette force semble s'exercer instantanément, ce qui pose des problèmes conceptuels.

- Pour éviter ce problème, on introduit une quantité vectorielle appelée $\overrightarrow{E}$, le champ électrique. Ce vecteur est défini partout dans l'espace.

- Suivant la valeur que prend ce vecteur en un point donné, les charges réagissent et subissent la force (dite de Lorentz électrique) :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$$

- Ce champ est généré par les différentes charges. Quand l'une se déplace, les changements dans la valeur du champ se propagent **à la vitesse de la lumière dans le milieu.**

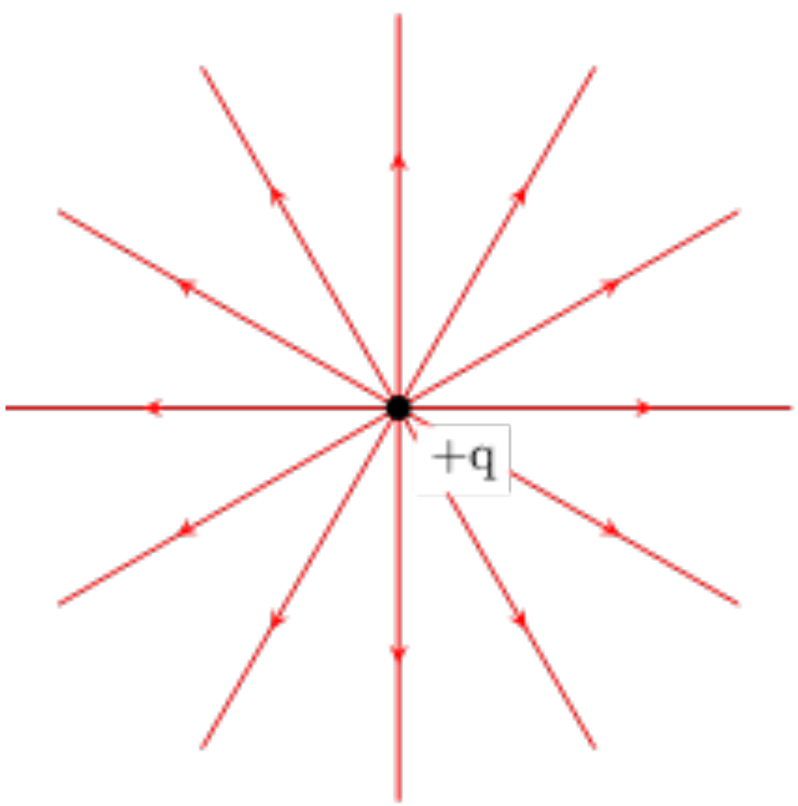
Exercice 1

- Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{E}$ généré par un proton unique, à une distance $r = 10^{-10}$ m de ce dernier.
- On rappelle : $E = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ avec $q = +e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C et $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F\,.\,m^{-1}$
- L'unité du champ E est le volt par mètre ($V\,.\,m^{-1}$).

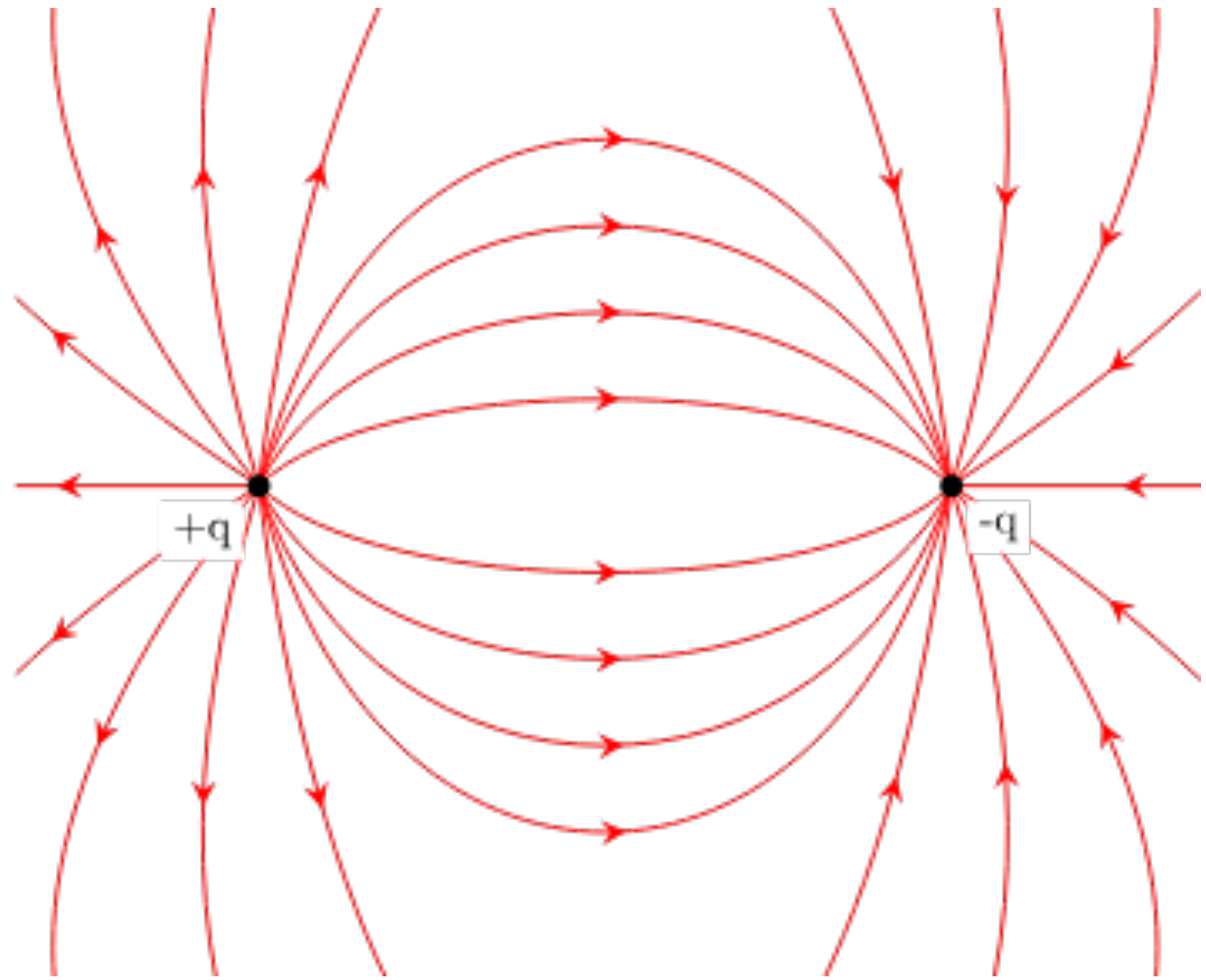
Un cousin germain : le champ gravitationnel

- Le même raisonnement permet d'introduite une quantité vectorielle appelée $\vec{g}$, le champ gravitationnel, tel que les masses subissent une force :
-
$$\overrightarrow{F} = m\vec{g} = m\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$$
- Une grande partie des résultats obtenus dans ce cours seront transposables directement à l'étude des champs de gravitation ! De chouettes exercices en perspective !

Allure du champ électrique

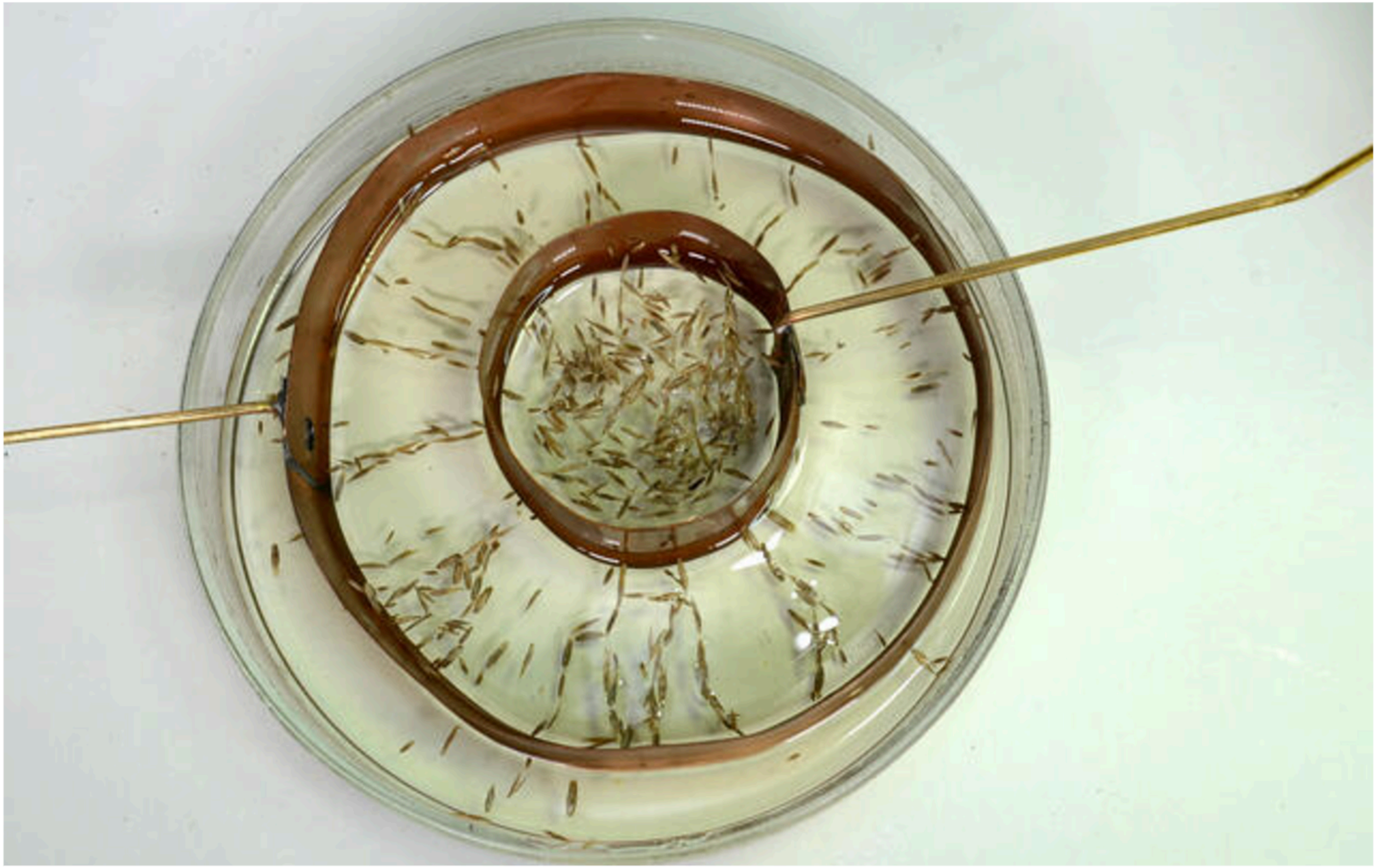


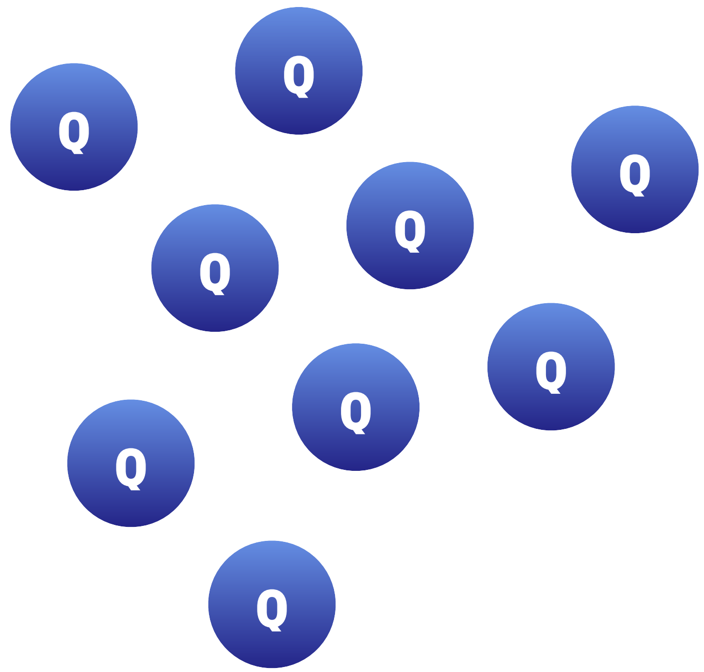
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

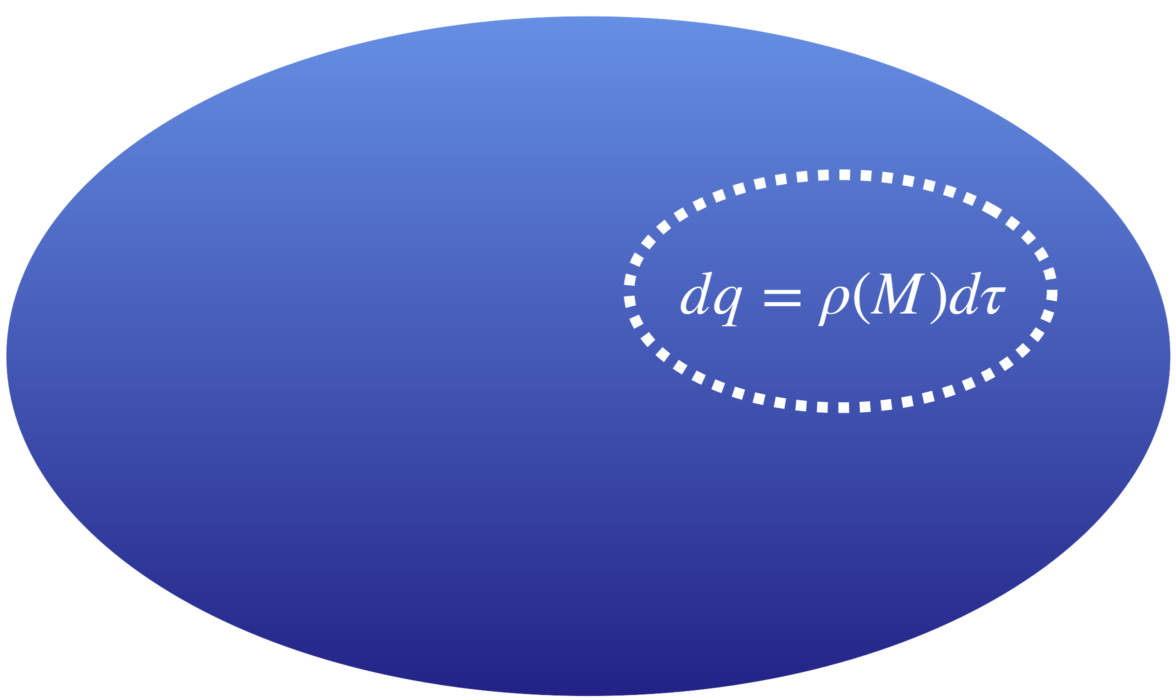


$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_g^2}\vec{u}_{r_g} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_d^2}\vec{u}_{r_d}$$

Allure du champ électrique







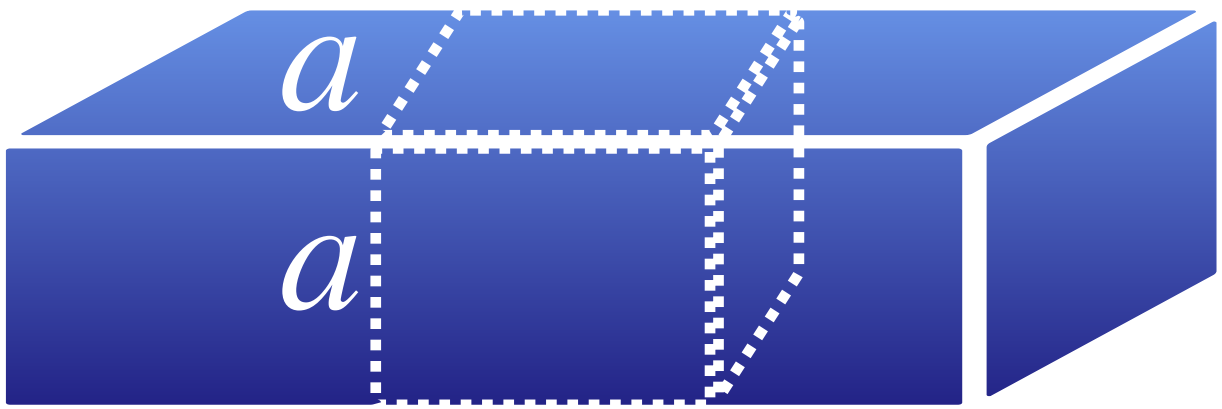
Distributions de charges
Distribution volumique

- **Distribution discrète :**
  $$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}\vec{u}_{r,i}$$
  Les champs s'additionnent.

- **Distribution continue :**
  On définit la densité volumique de charge $\rho(M)$ telle que :

  $\rho = q_{tot}/V$ si la charge est homogène.

Distributions de charges
Distribution surfacique



$$S = a^2$$

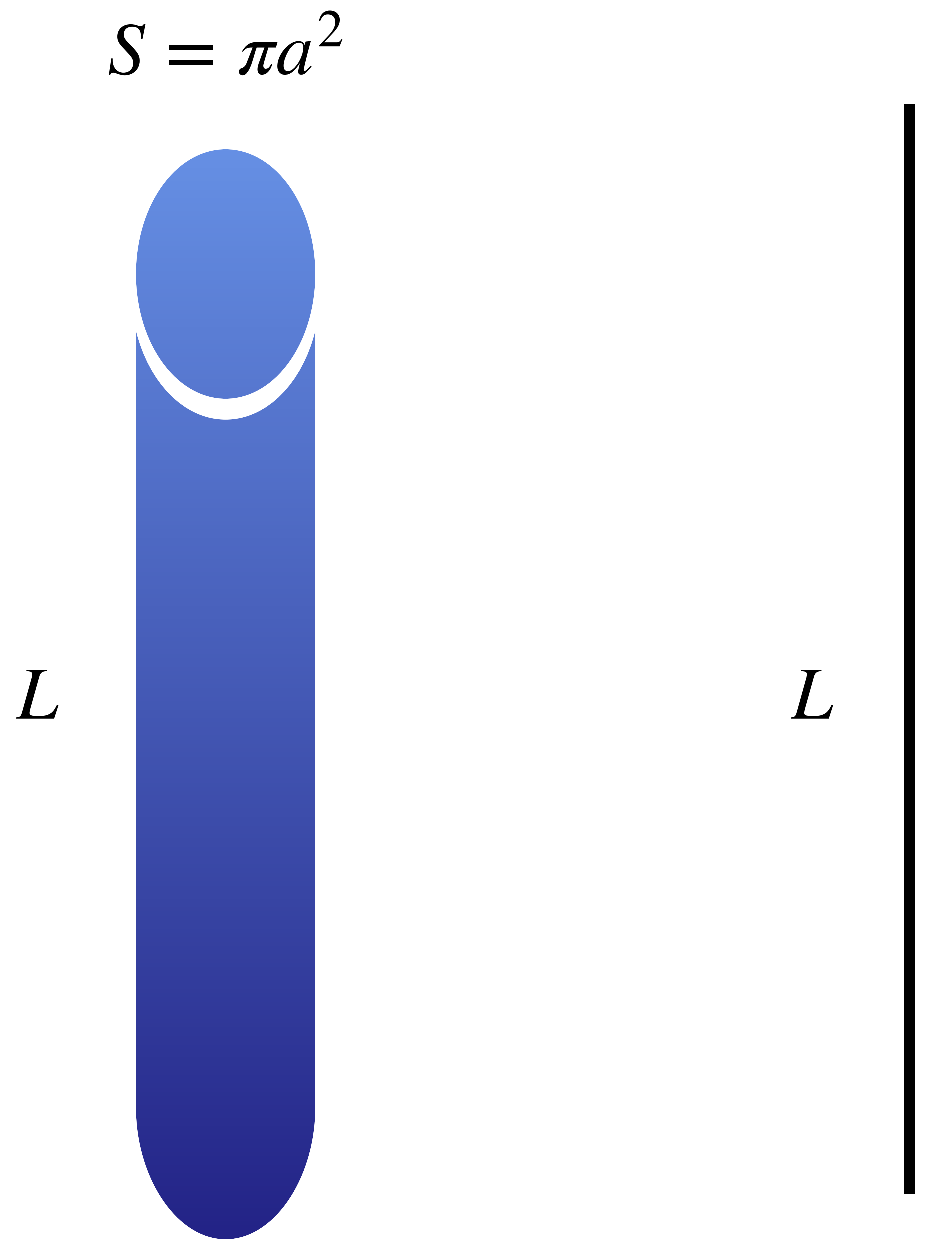
- **Distribution surfacique :** Quand les charges sont situées sue une surface de faible épaisseur il est commode de définir : $\sigma(M)$ telle que :

$$\sigma(M)dS = \rho(M)d\tau$$

- Sur l'exemple ci-contre :

$\rho * a^3 = \sigma a^2$ d'où $\sigma = \rho a$

Distributions de charges
Distribution linéique



- **Distribution linéique :**
  Quand les charges sont situées dans un volume pratiquement sans dimension, il est commode de définir : $\lambda(M)$ telle que :

$$\lambda(M)dl = \rho(M)d\tau$$

- Sur l'exemple ci-contre :

$$\rho * L * \pi a^2 = \lambda L \text{ d'où } \lambda = \rho \pi a^2$$

Exercice 2

1. On considère une boule (sphère pleine) uniformément chargée, de rayon R et de charge totale Q. Déterminer sa charge volumique ρ.

2. La même charge est désormais répartie uniquement à la surface de la sphère. Déterminer alors sa densité surfacique de charge.

3. Un cube plein de côté a porte une densité volumique ρ_C. Déterminer la charge totale du cube.

4. Cette charge est désormais portée à sa surface. Déterminer la charge surfacique σ_C du cube.

Calcul du champ E

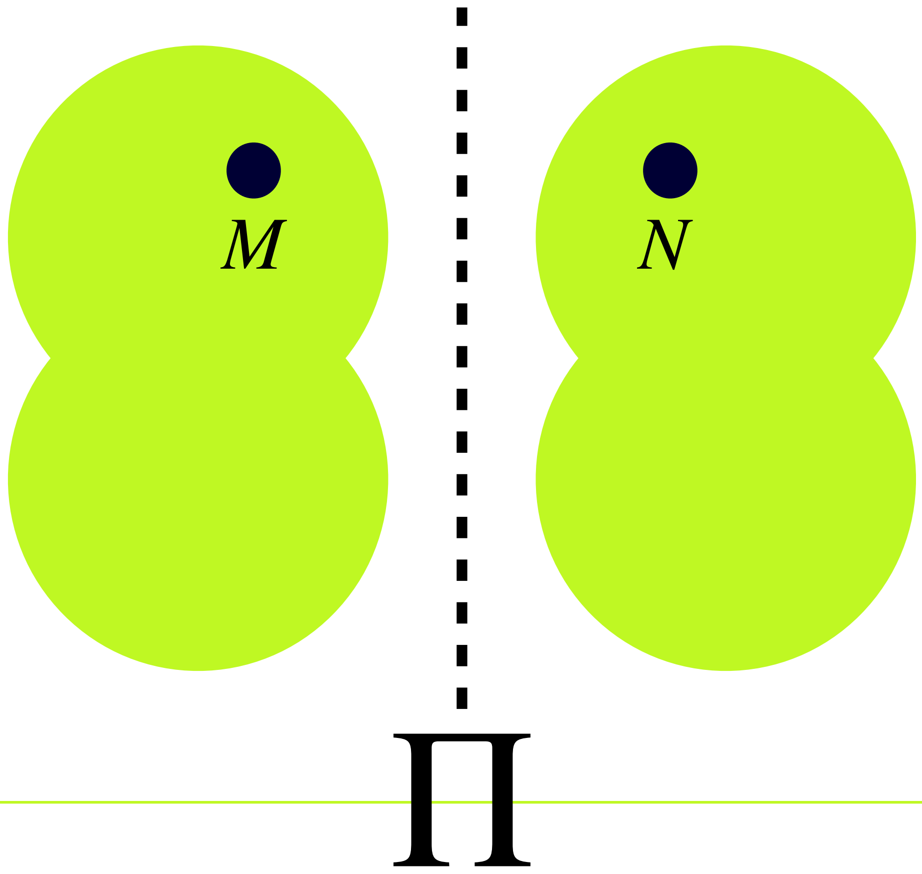
- Pour calculer le champ $\overrightarrow{E}$ d'une distribution de charges volumique, il faut calculer l'intégrale suivante :
$$\overrightarrow{E}(M,t) = \iiint_V \frac{\rho(M)}{4\pi\epsilon_0 PM^3}\overrightarrow{PM}\,d\tau$$

- Pour une distribution de charges surfacique, le calcul serait :
$$\overrightarrow{E}(M,t) = \iint_S \frac{\sigma(M)}{4\pi\epsilon_0 PM^3}\overrightarrow{PM}\,dS$$

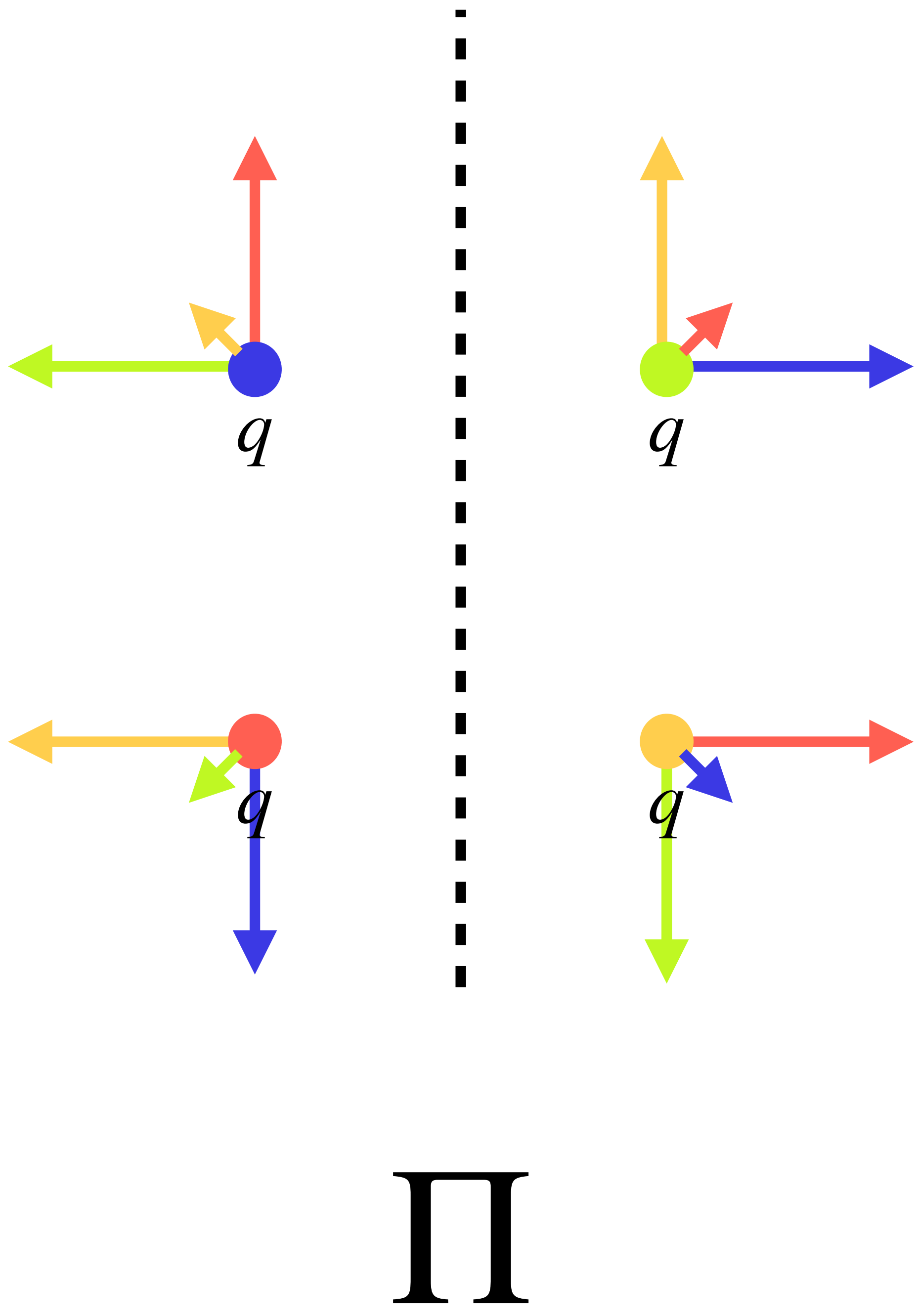
- Pour une distribution de charges linéique, le calcul serait :
$$\overrightarrow{E}(M,t) = \int_L \frac{\lambda(M)}{4\pi\epsilon_0 PM^3}\overrightarrow{PM}\,dl$$

Symétries du champ E

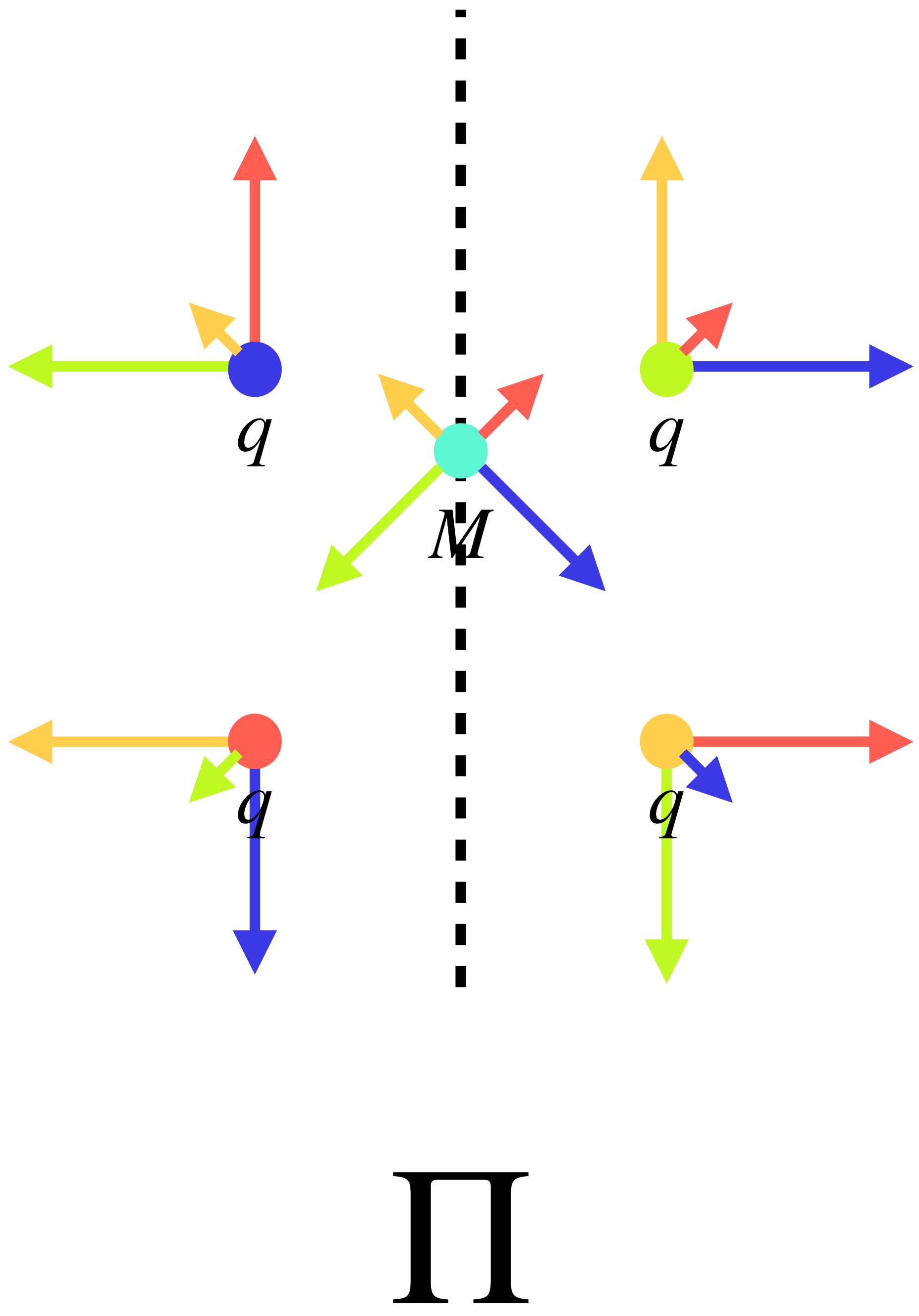
- **Principe de Curie :** si une grandeur physique possède des symétries, alors les effets qu'elle engendre auront les mêmes symétries.
- Si une distribution de charge volumique est symétrie par rapport à un plan, alors $\rho(M) = \rho(N)$ avec M et N deux points symétriques par rapport à Π.



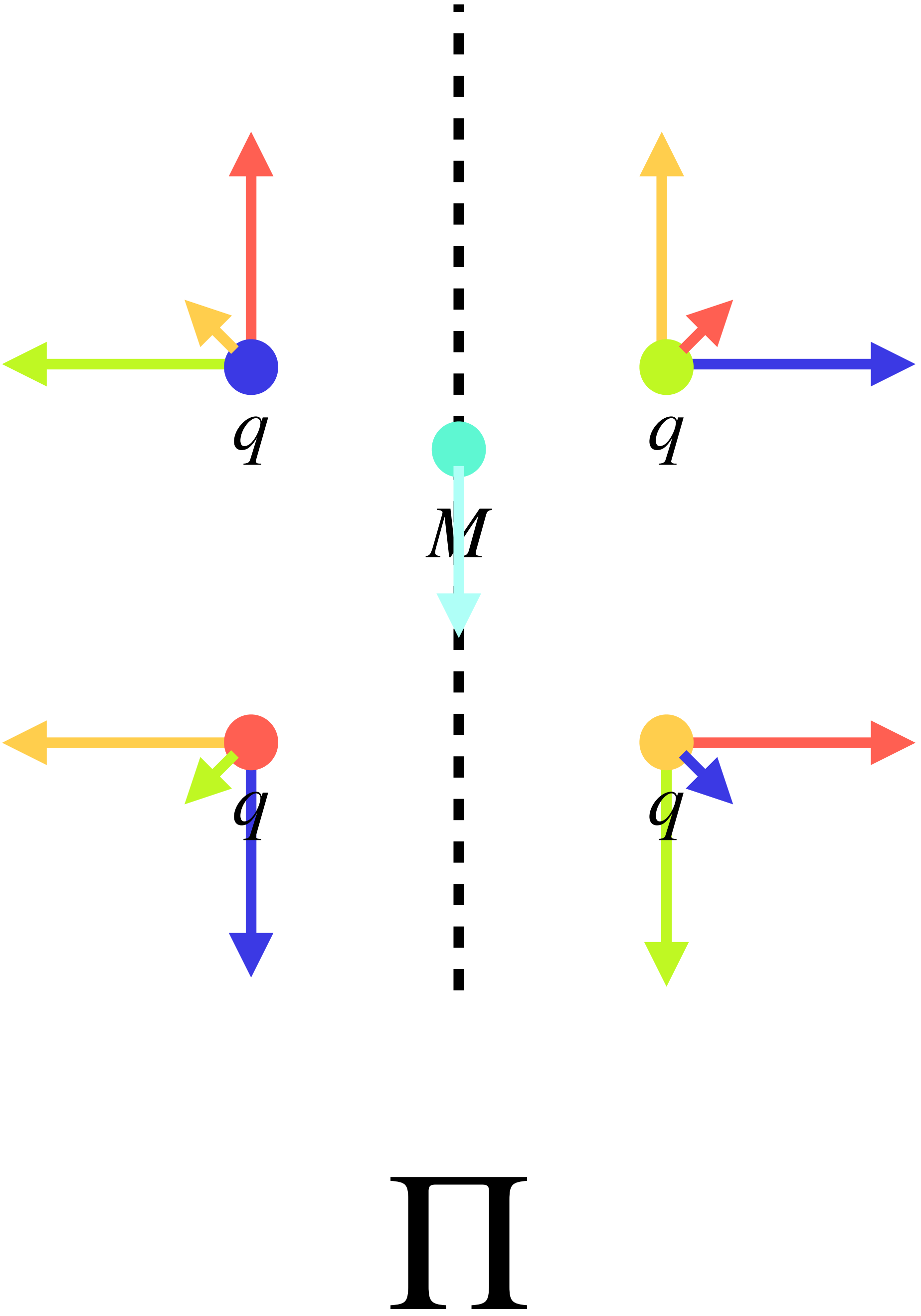
Symétries du champ E



Symétries du champ E



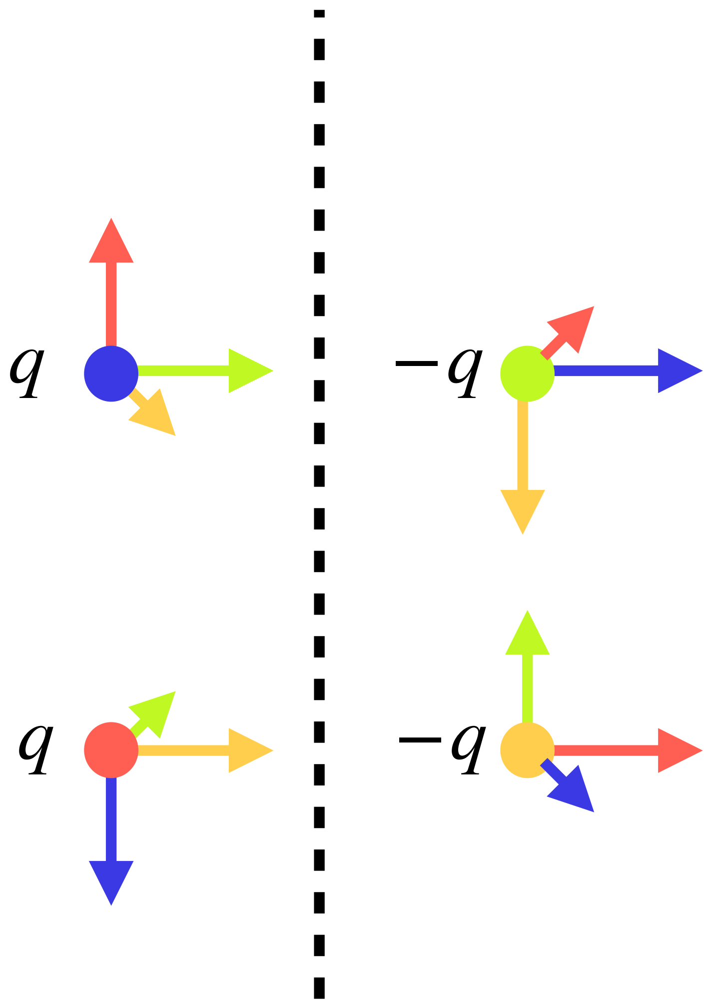
Symétries du champ E



Symétries du champ E

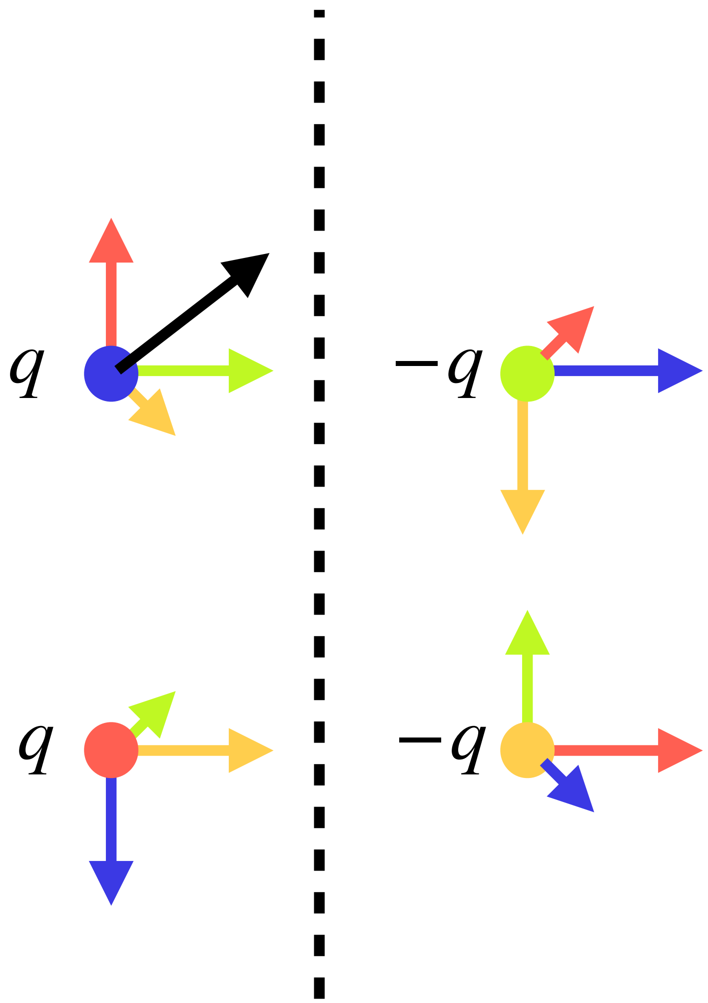
Si un point M appartient à un plan Π de symétrie du champ $\overrightarrow{E}$, alors le champ $\overrightarrow{E}(M)$ appartient au plan Π.

Symétries du champ E



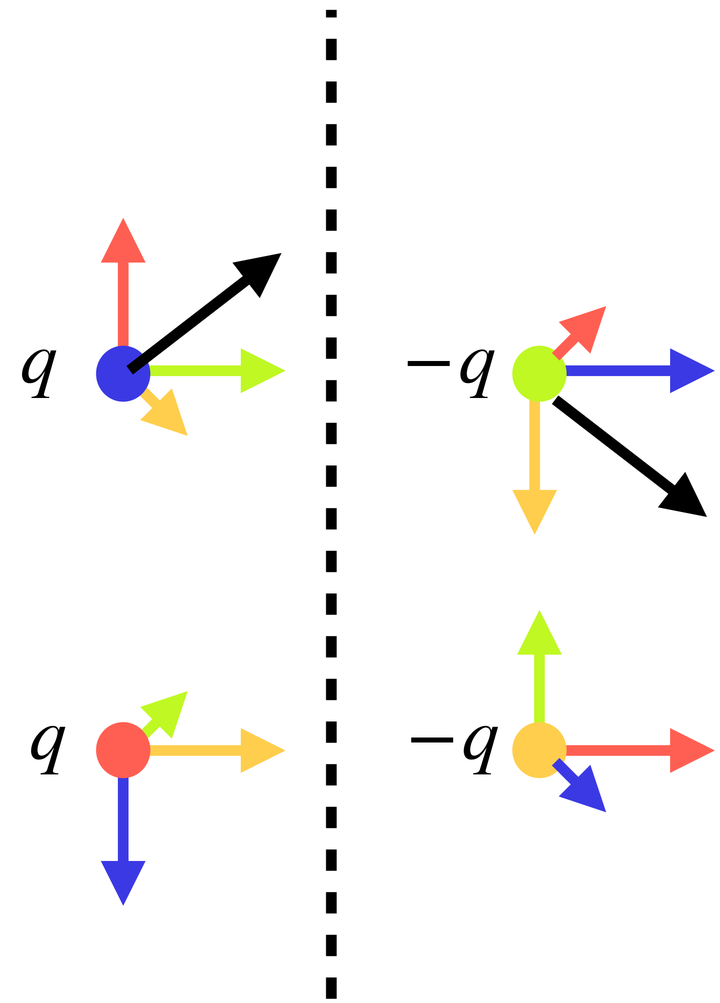
$$\Pi^*$$

Symétries du champ E



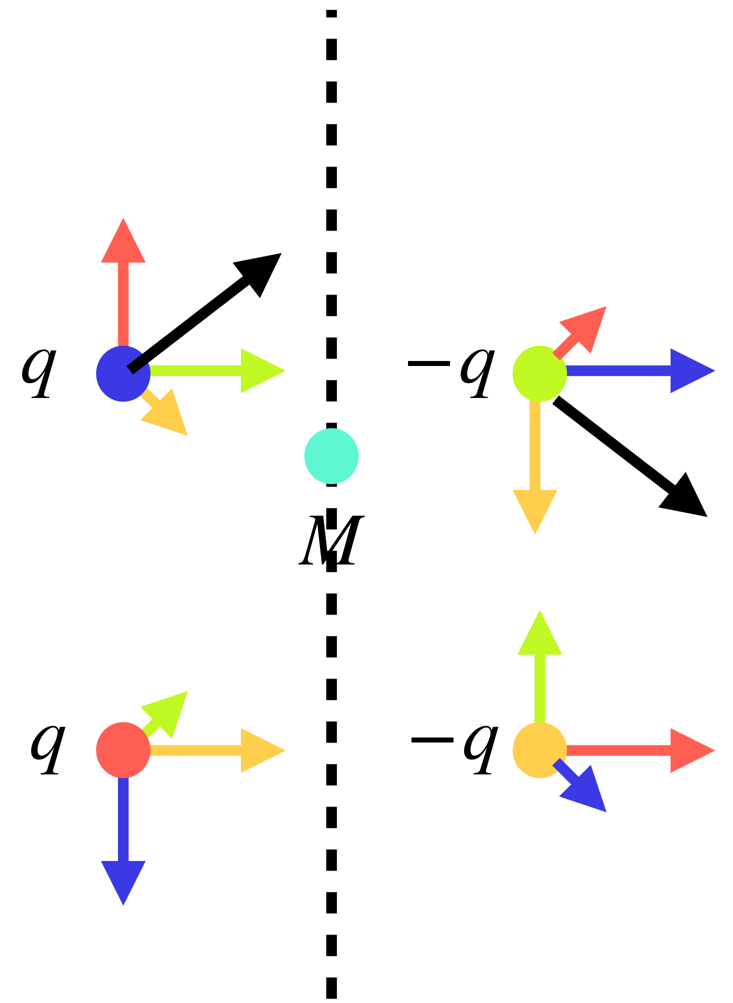
$$\Pi^*$$

Symétries du champ E



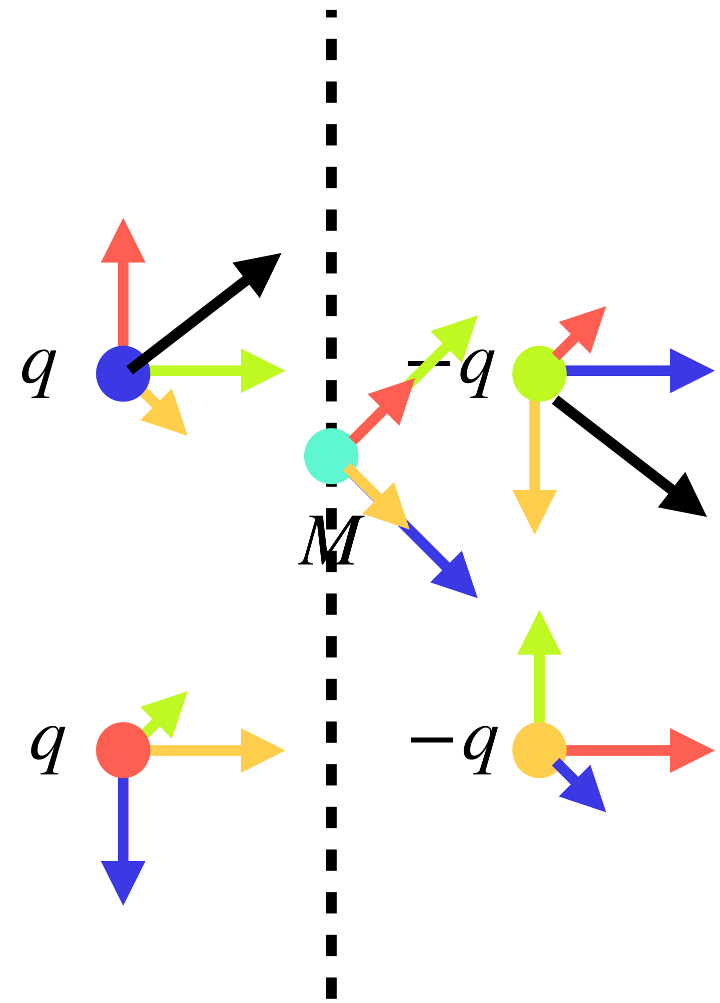
$$\Pi^*$$

Symétries du champ E



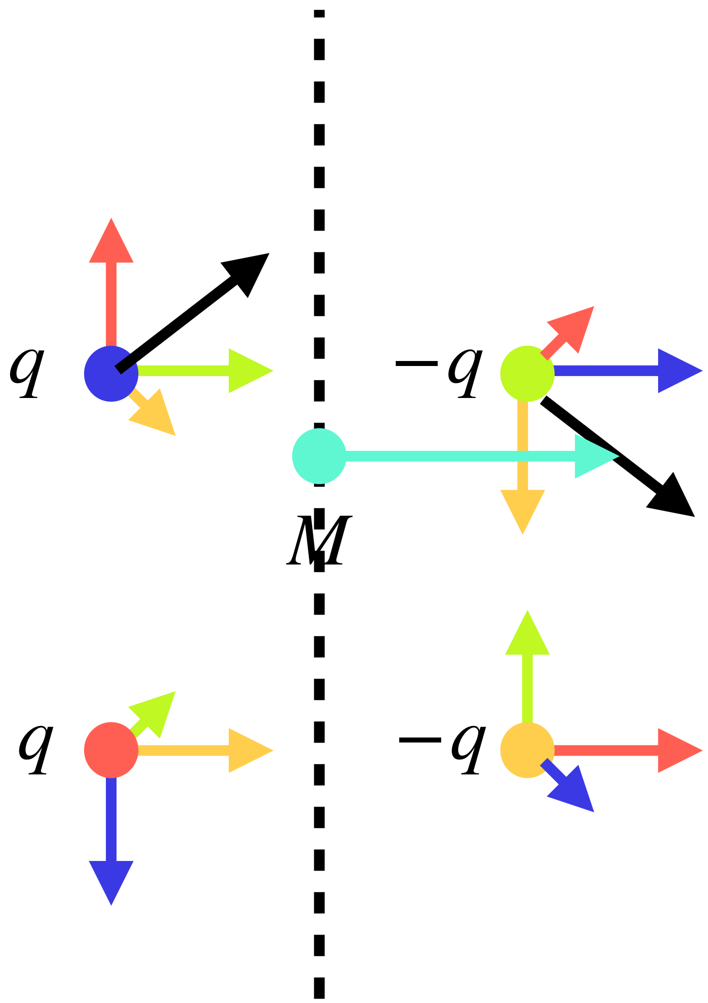
$$\Pi^*$$

Symétries du champ E



Π^*

Symétries du champ E



$$\Pi^*$$

Symétries du champ E

Si un point M appartient à un plan $\Pi*$ d'anti-symétrie du champ $\overrightarrow{E}$, alors le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est orthogonal au plan Π.

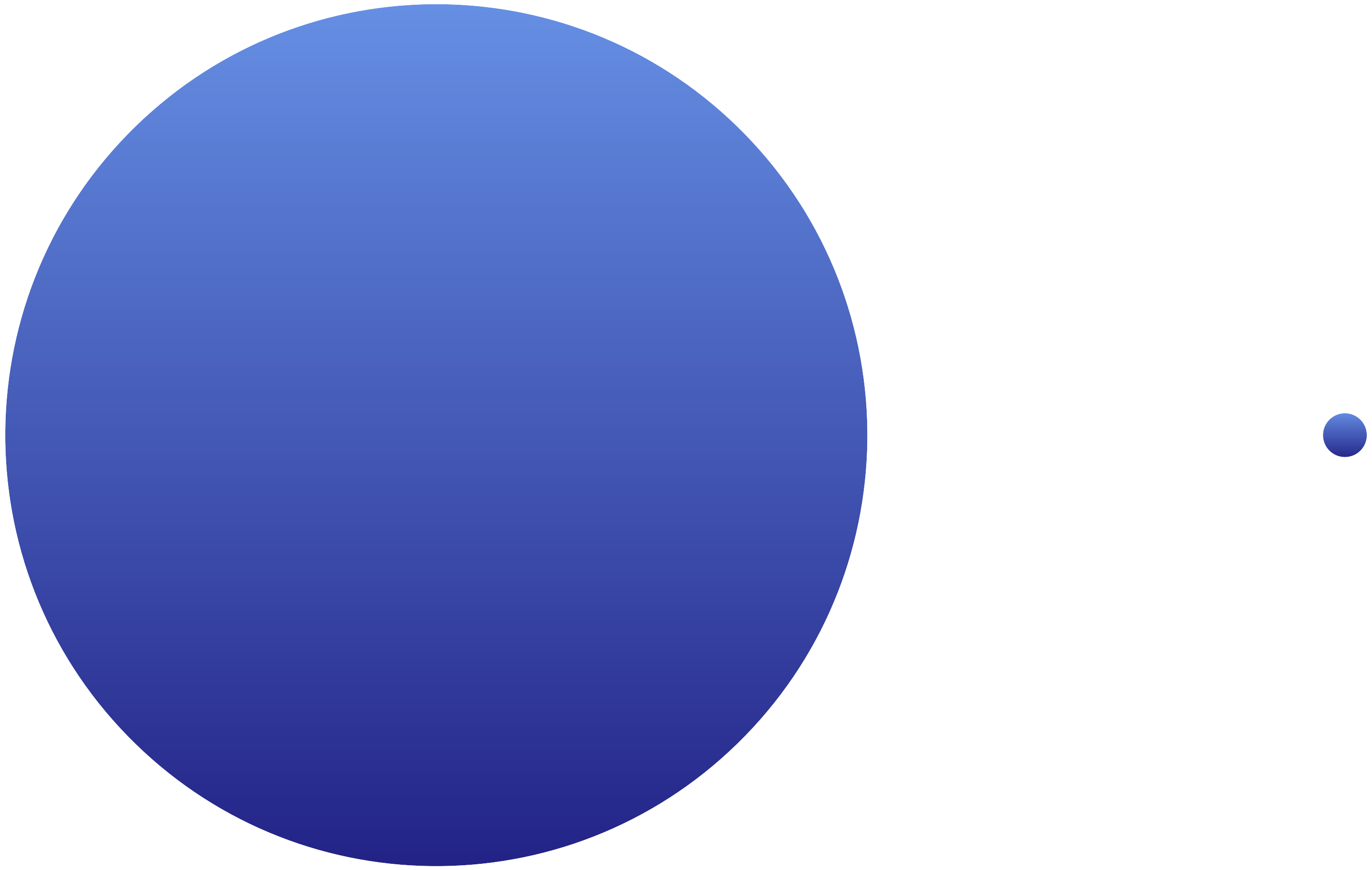
Symétrie de E

- Quand une distribution de charge est suffisamment symétrique, pour un même point M, on peut trouver plusieurs plans de symétrie de la distribution passant par M.

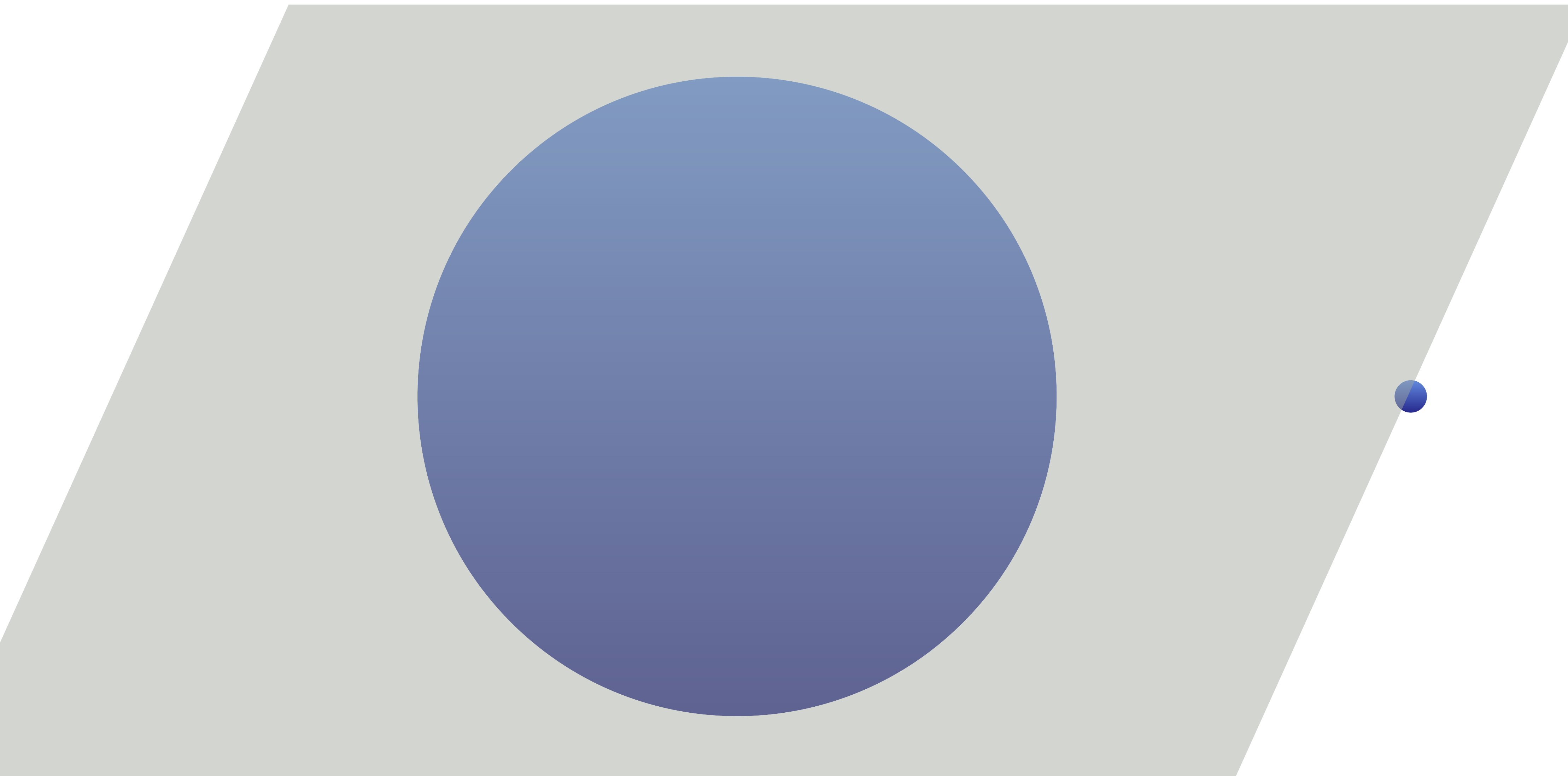
- Auquel cas, le champ appartenant à chacun de ces plans simultanément, on en déduit la direction du champ $\overrightarrow{E}$.

- Trouver un plan d'antisymétrie rend la chose encore plus facile, la direction du vecteur $\overrightarrow{E}$ étant immédiatement connue.

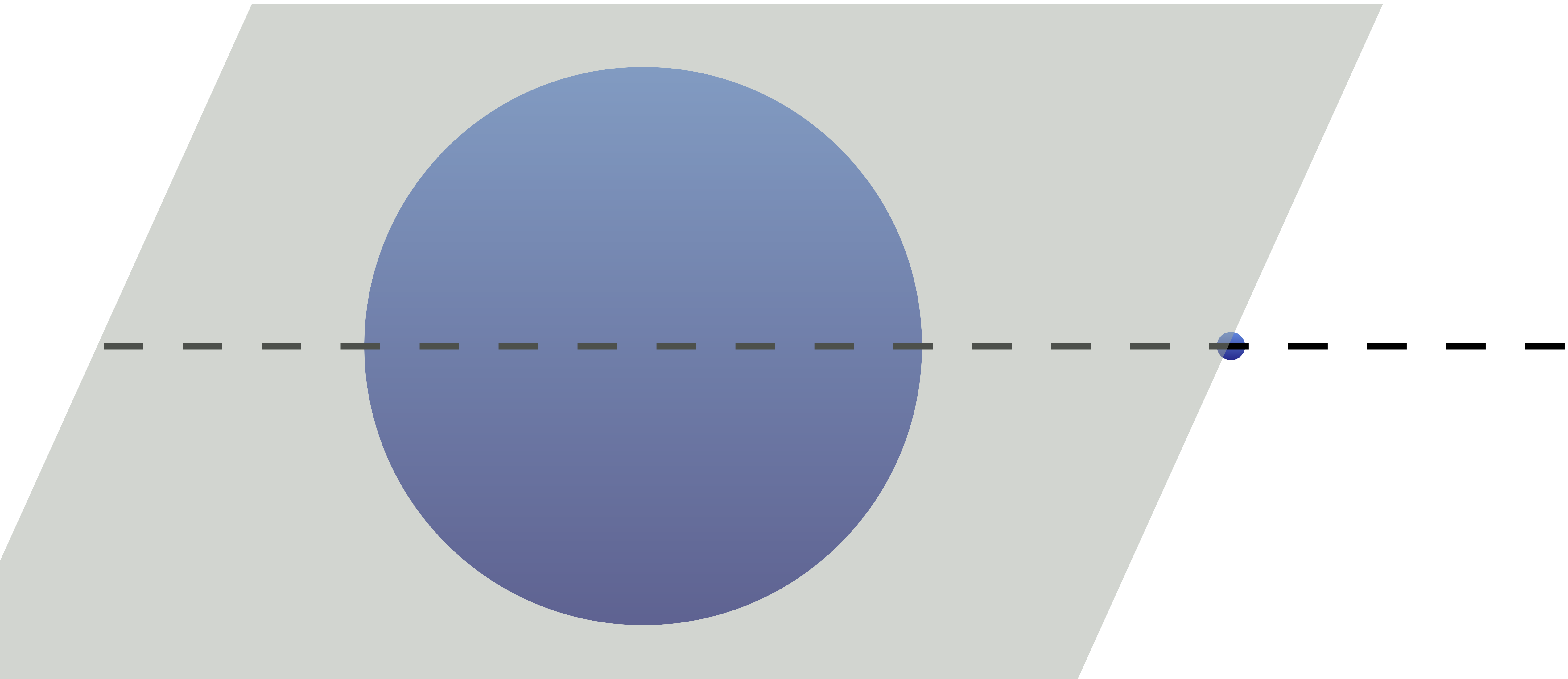
Symétrie de E



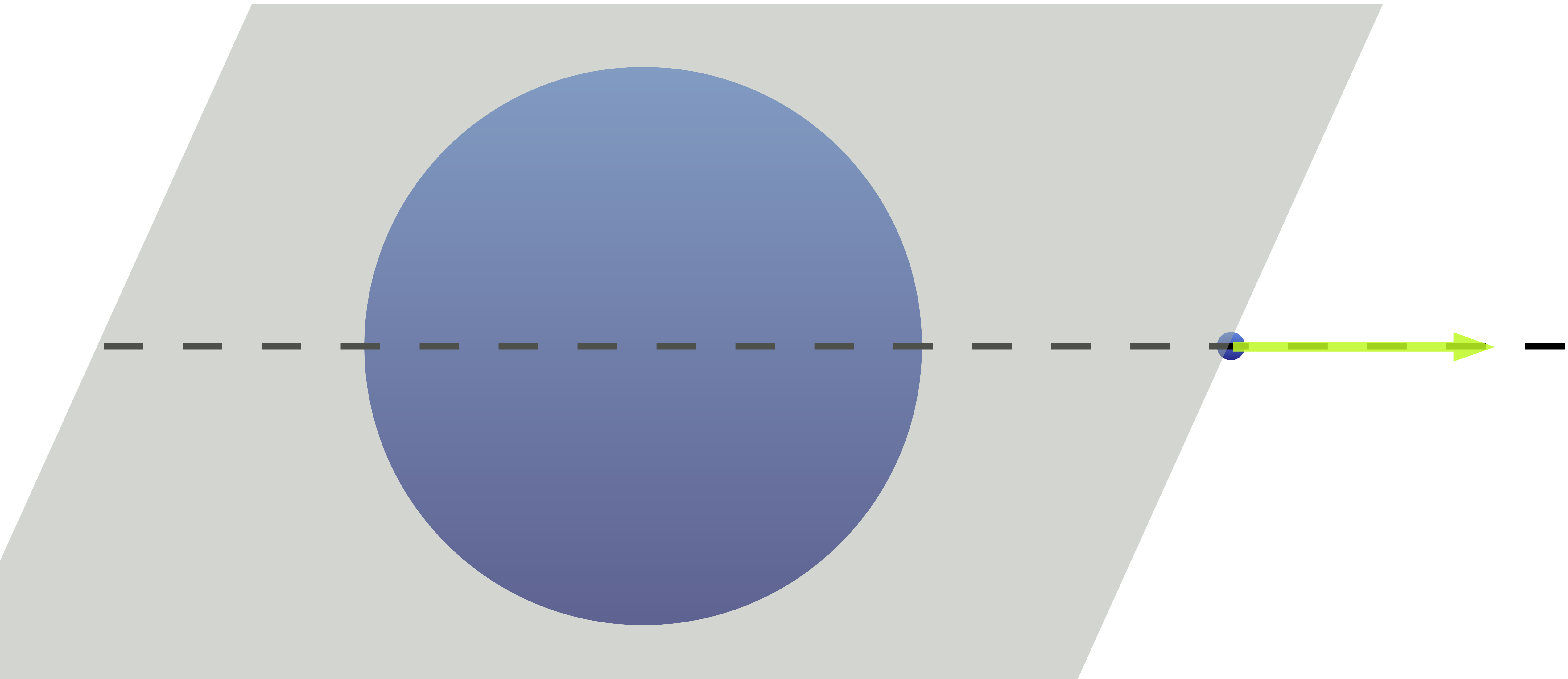
Symétrie de E



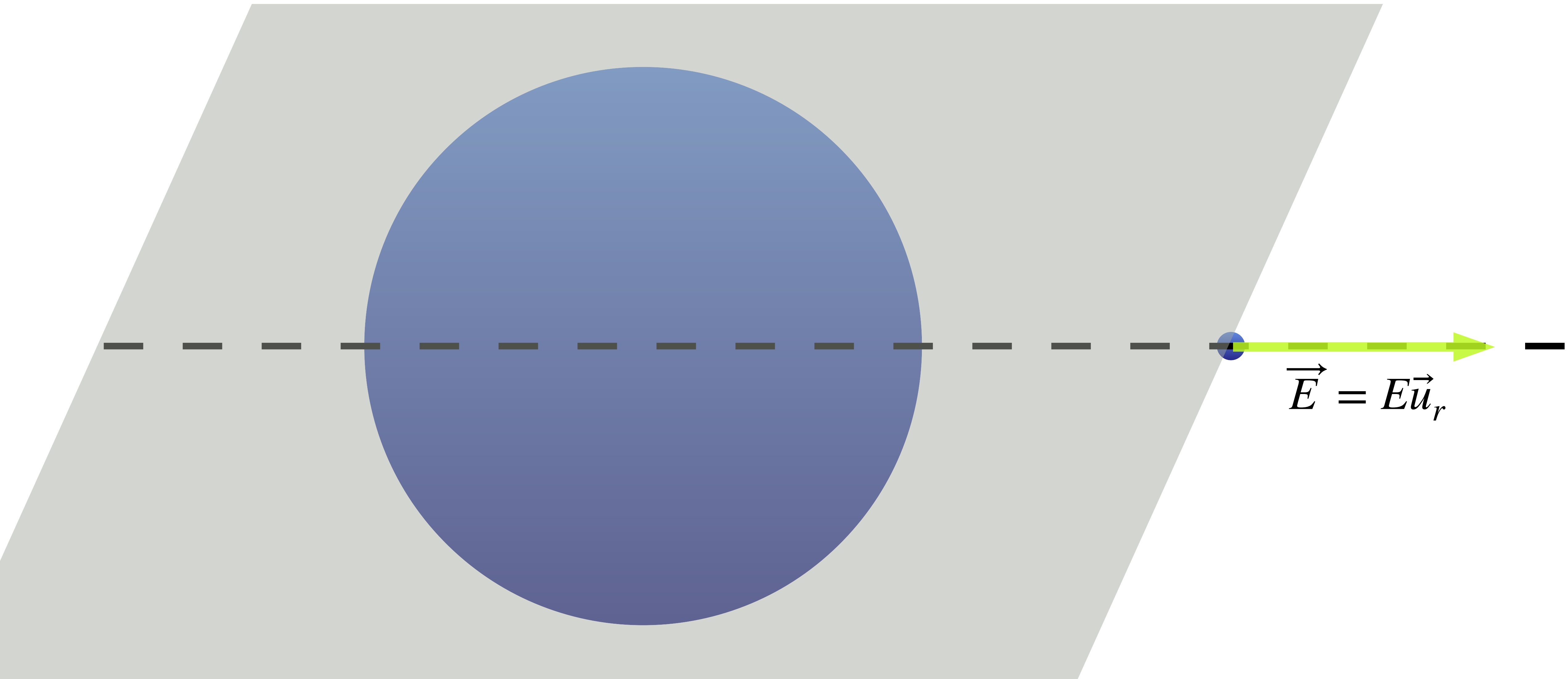
Symétrie de E



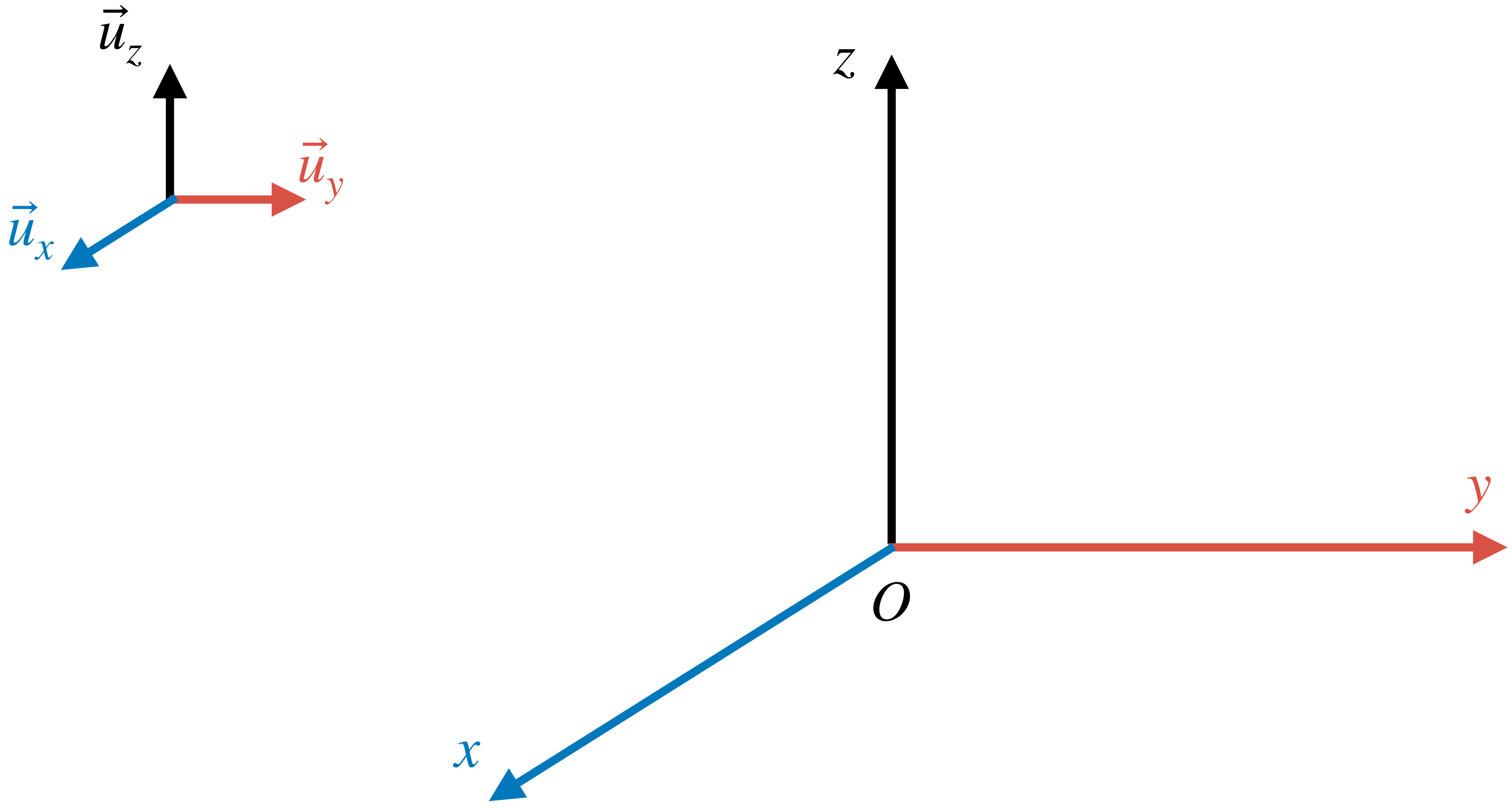
Symétrie de E



Symétrie de E

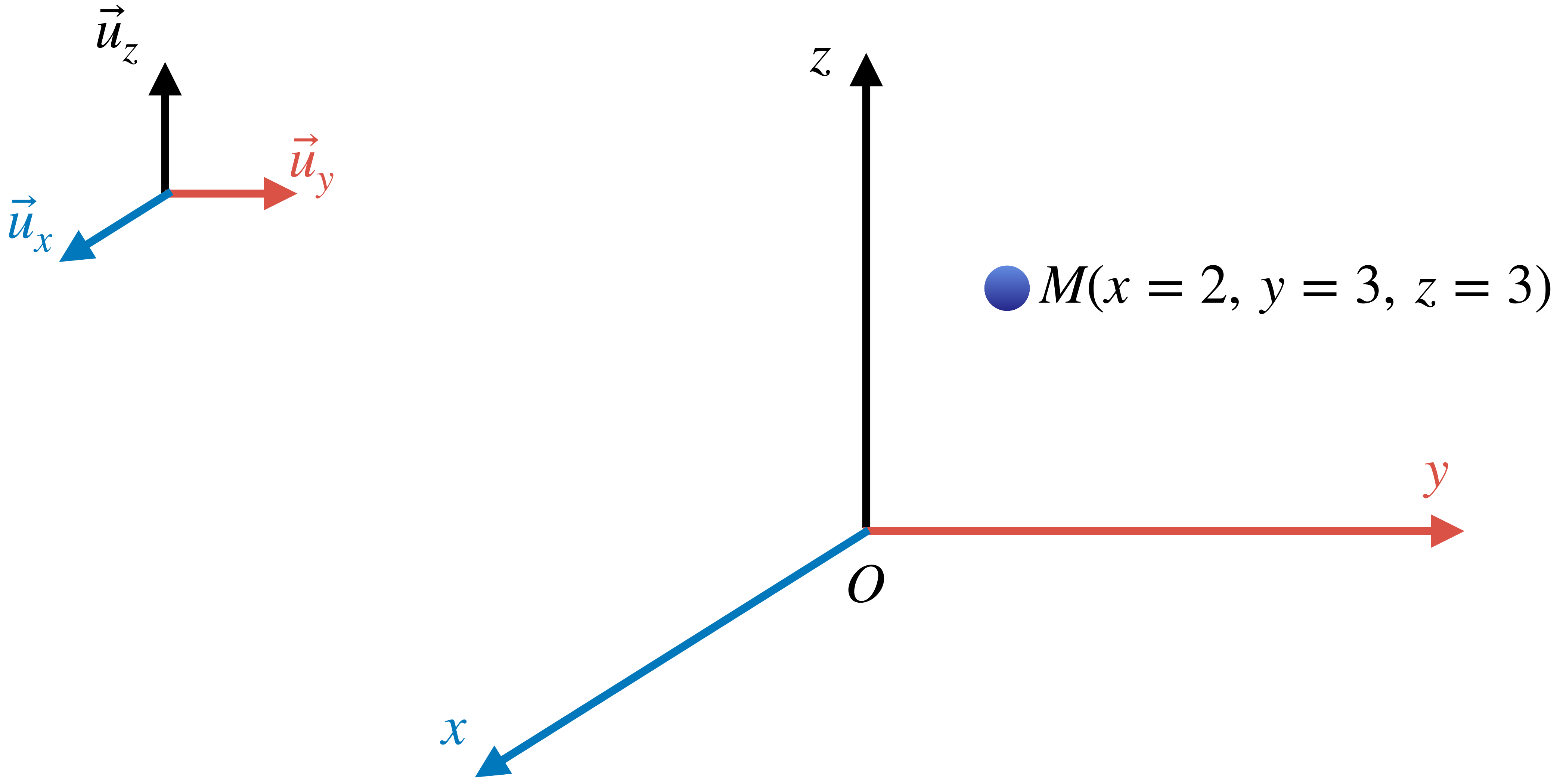


Parenthèse : les systèmes de coordonnées



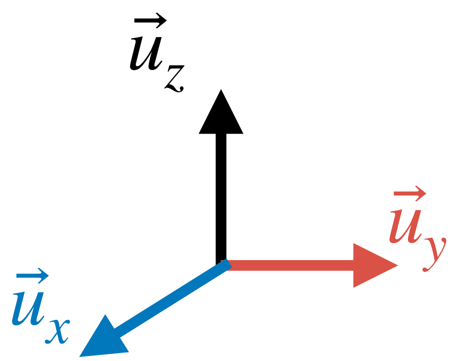
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



z

$M(x = 2,\ y = 3,\ z = 3)$

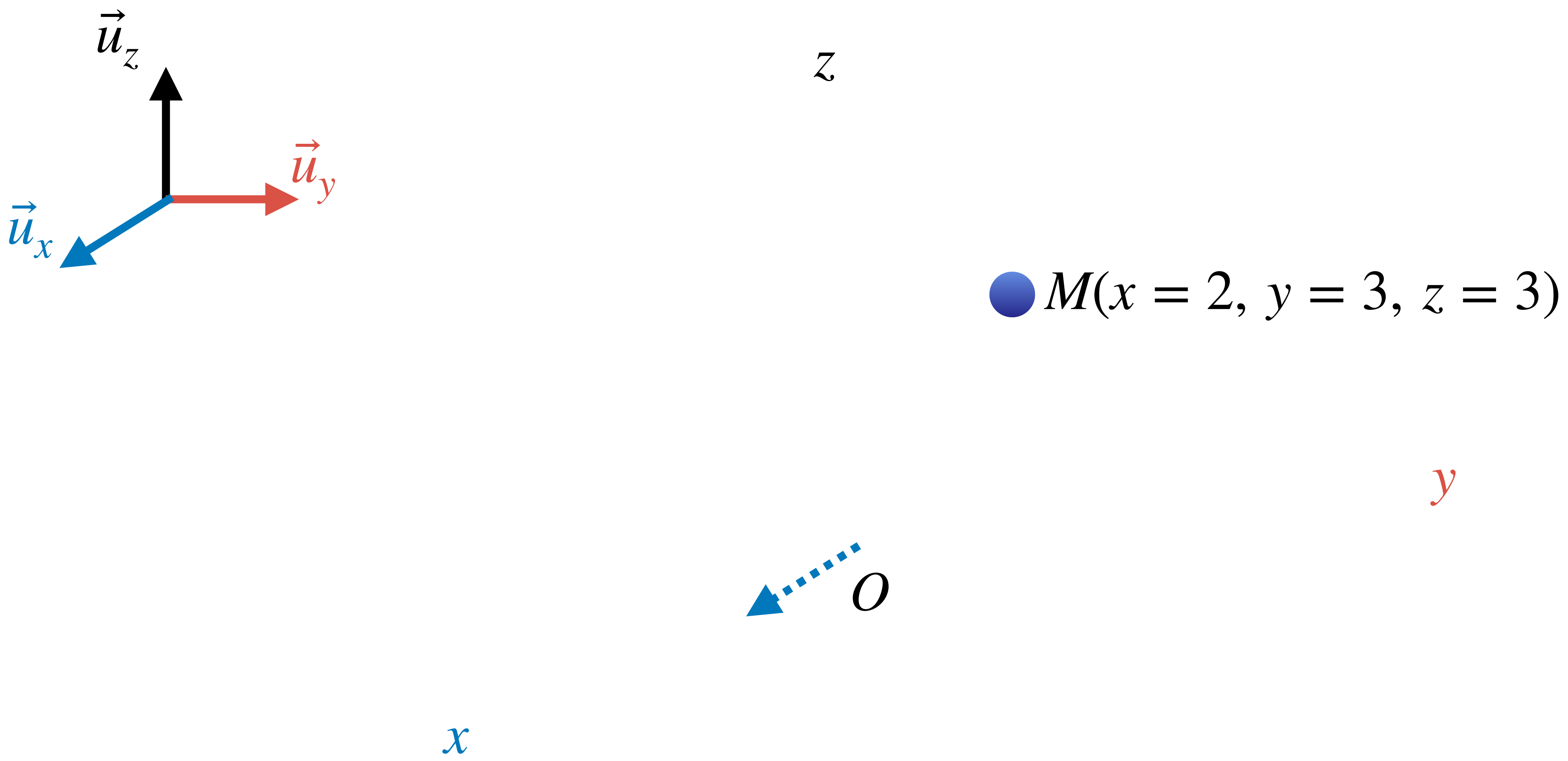
y

O

x

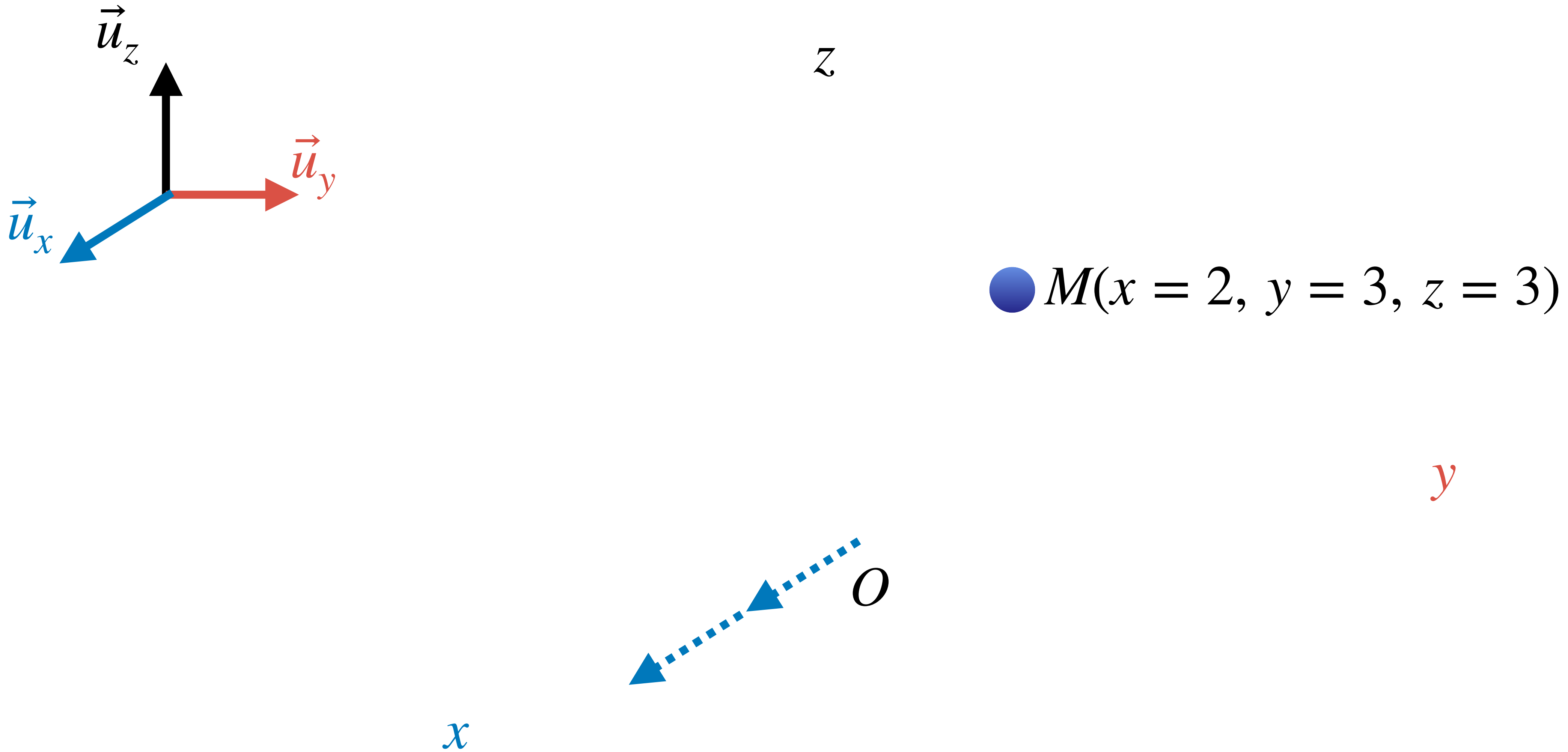
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



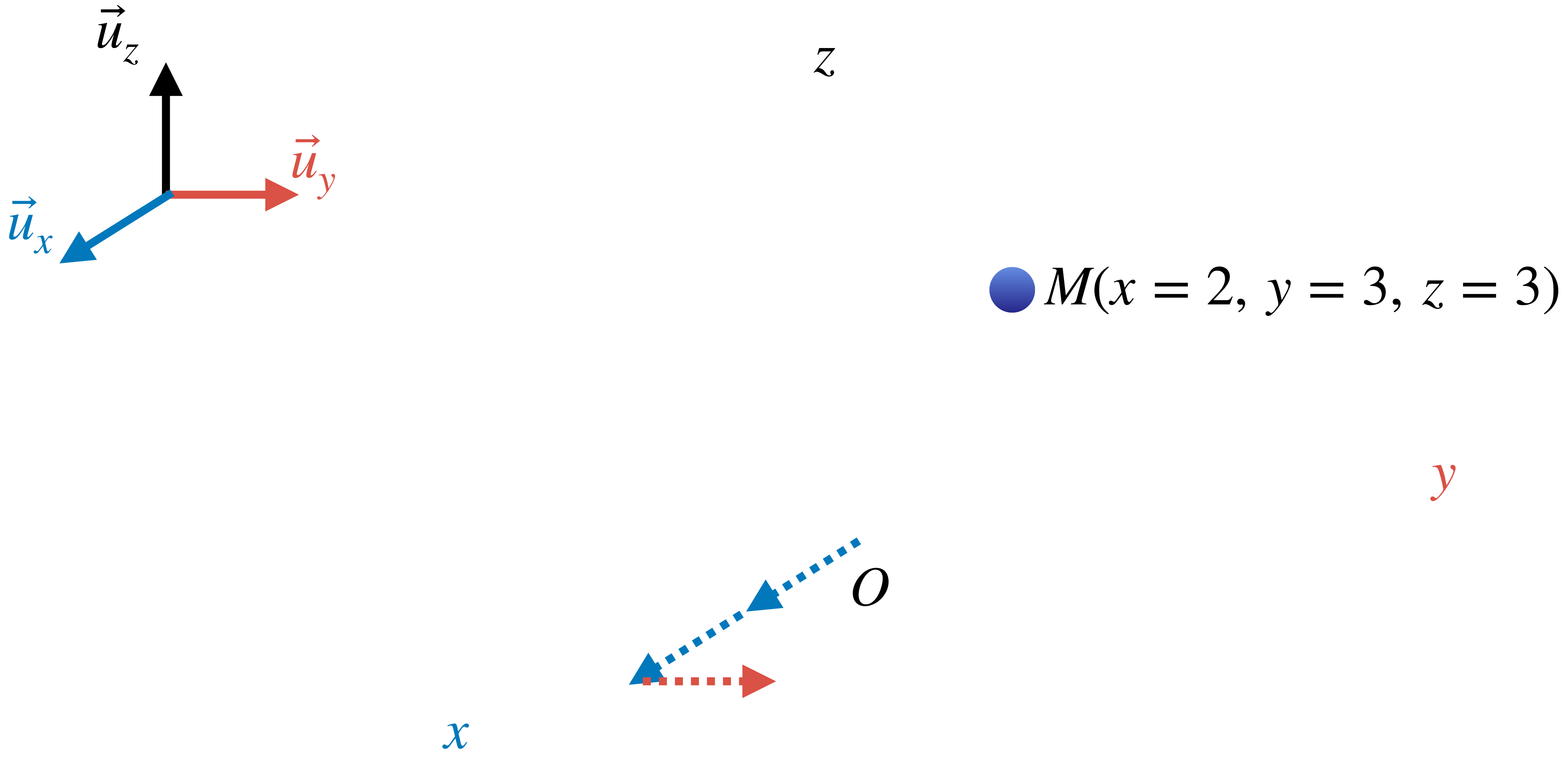
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



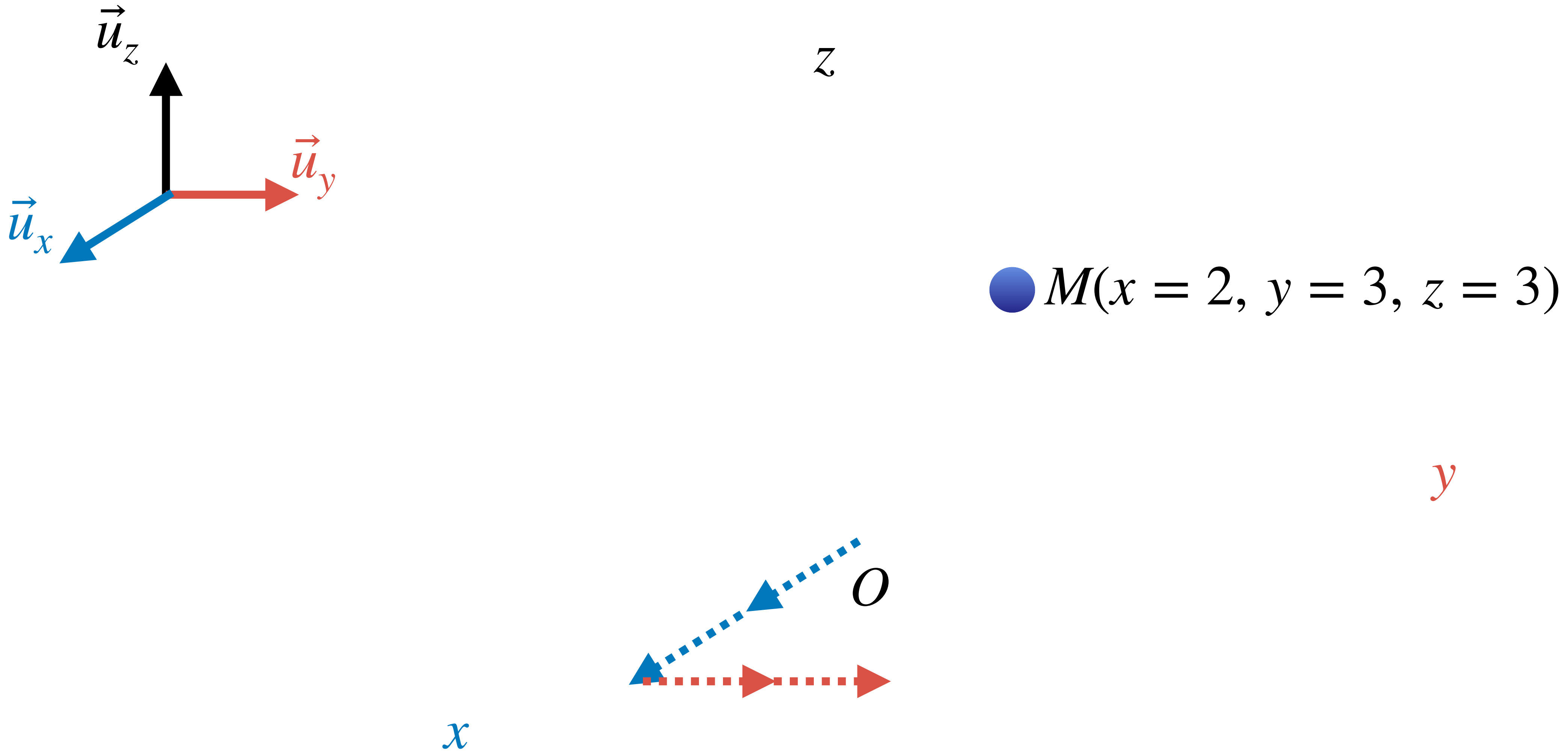
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



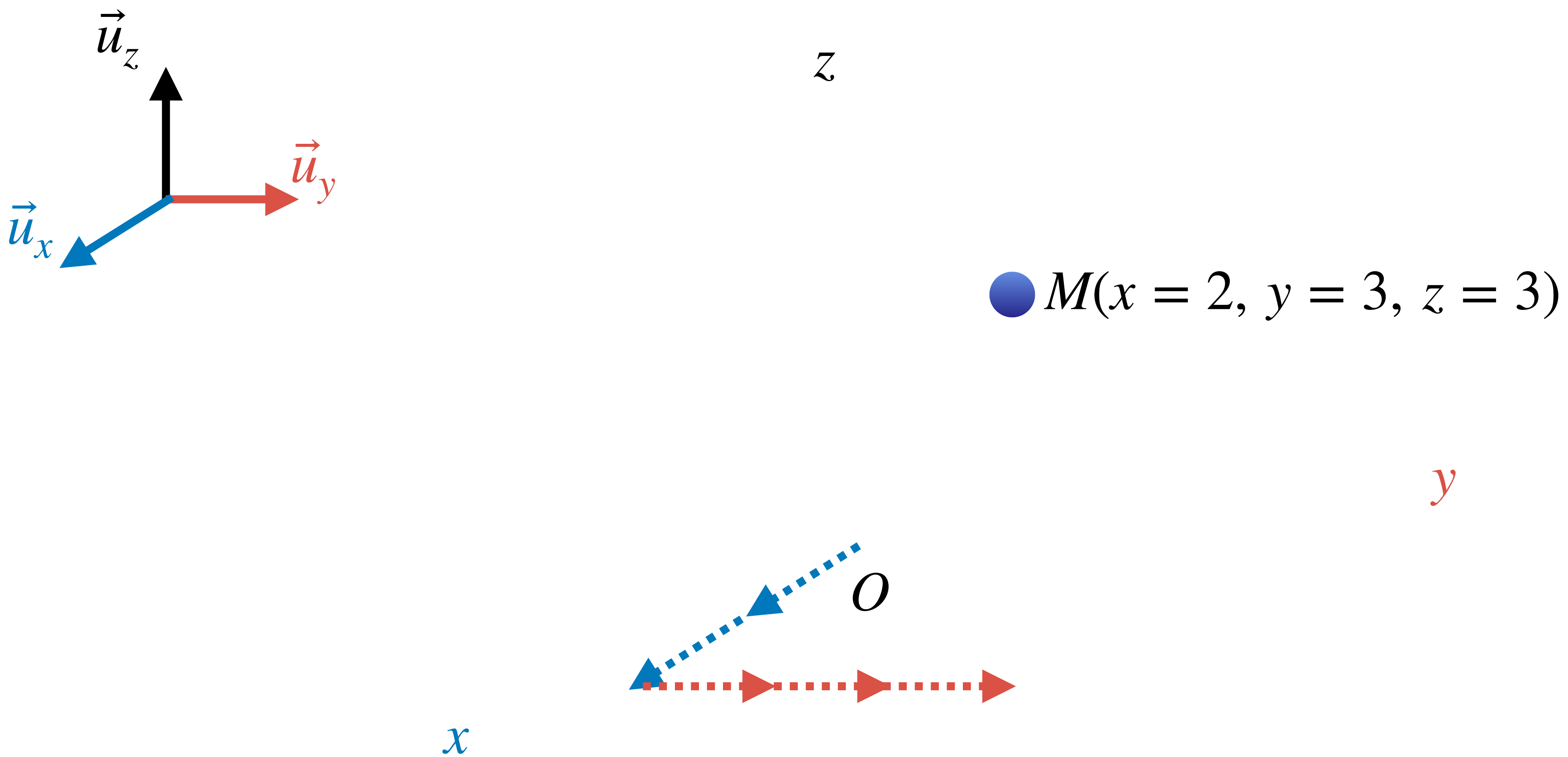
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



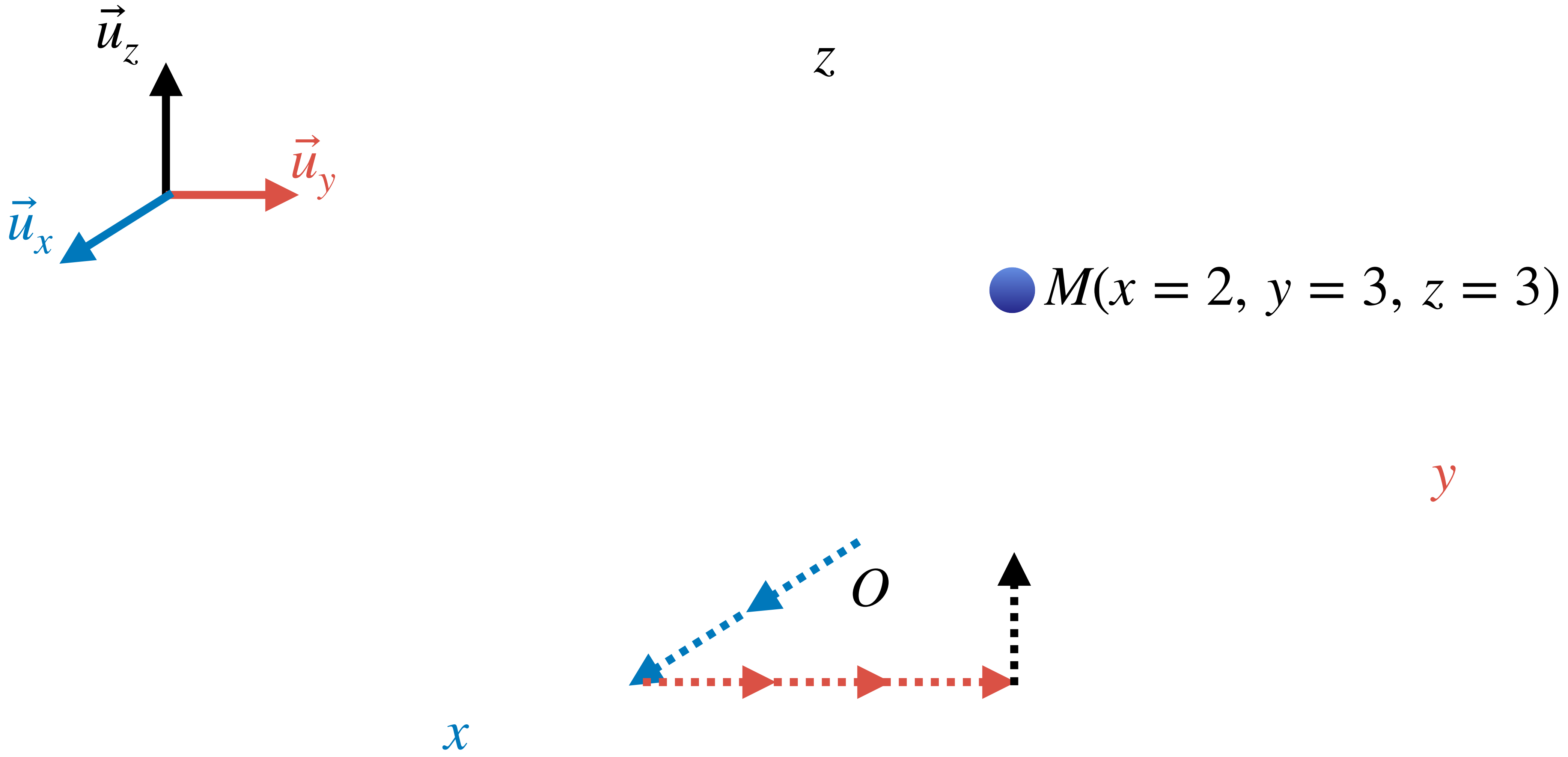
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



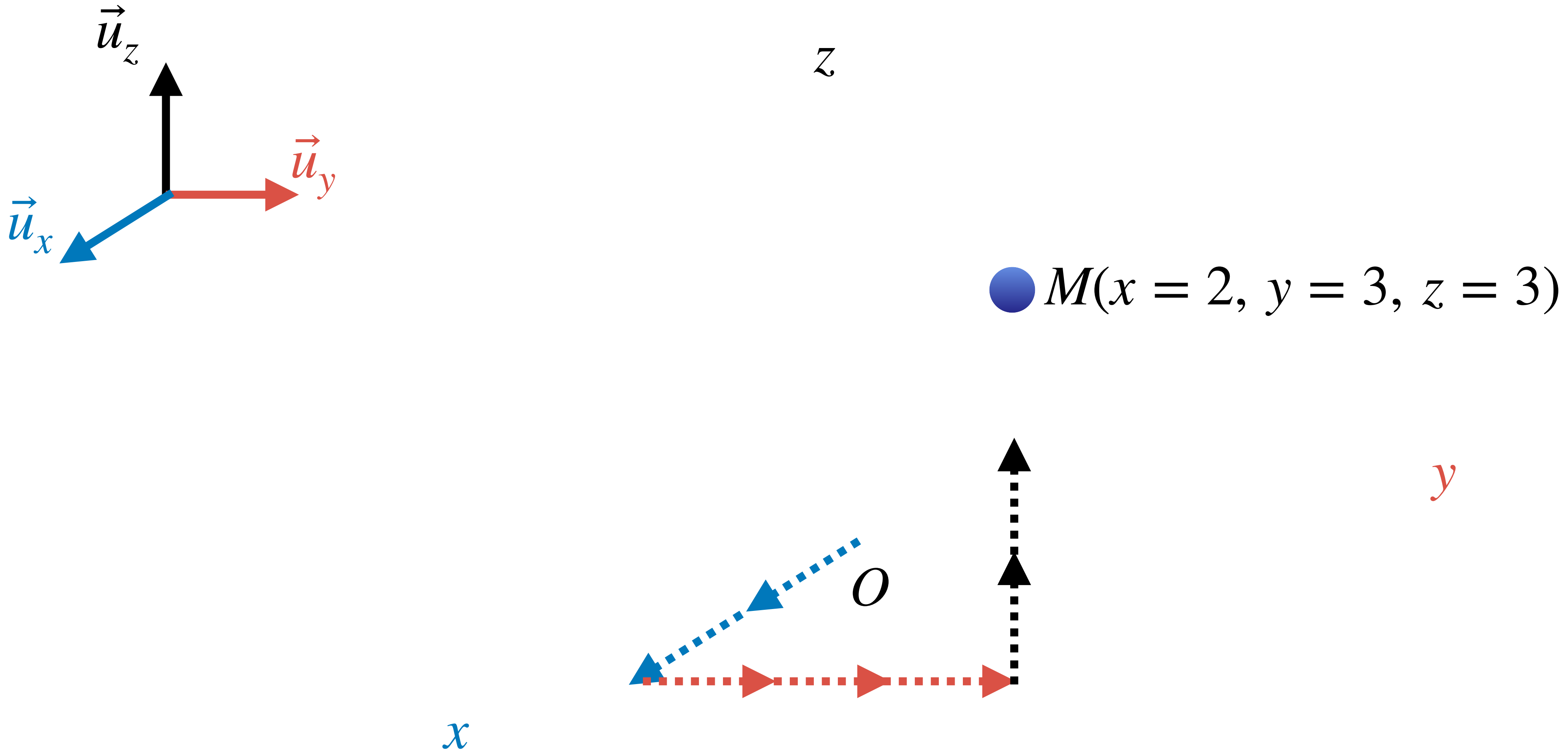
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



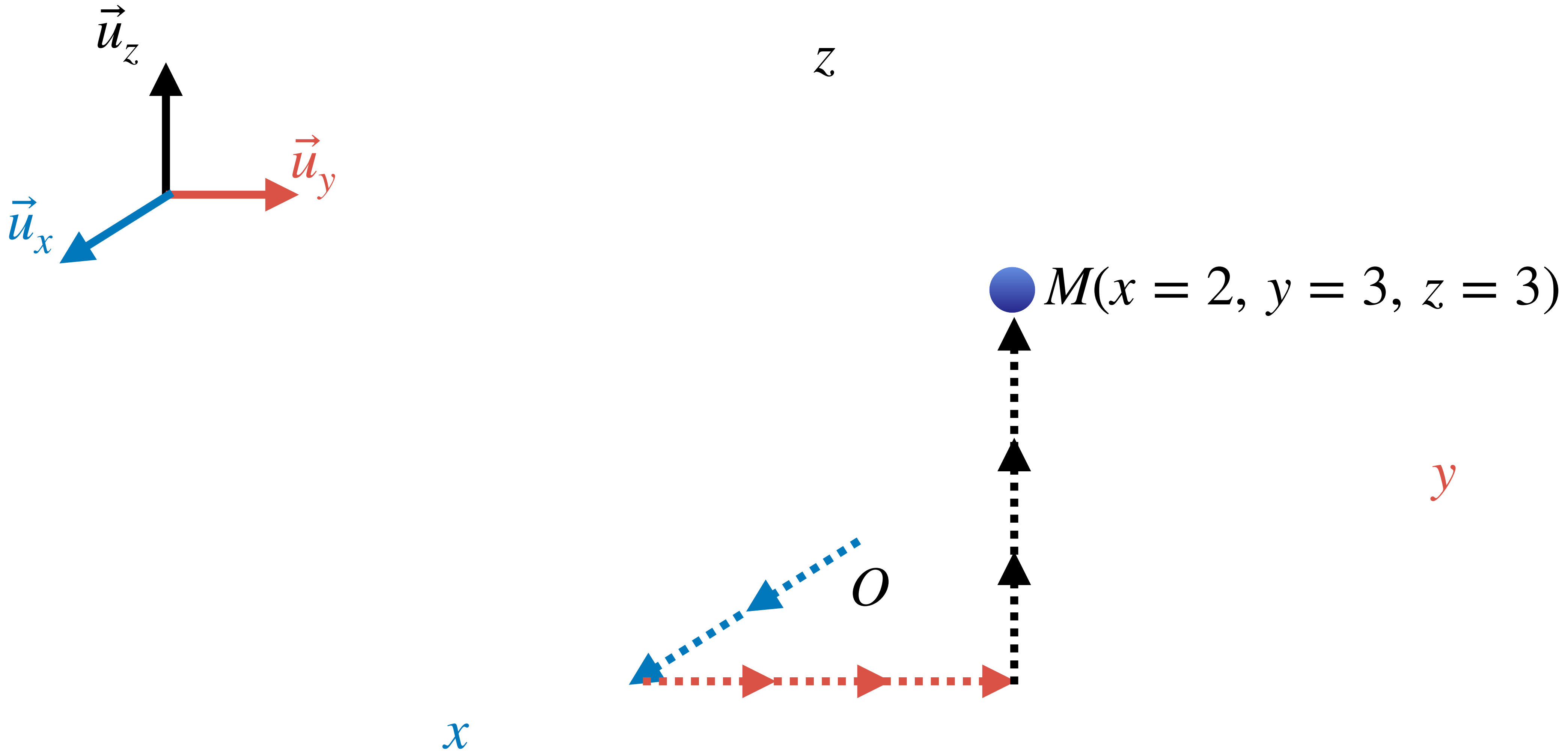
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



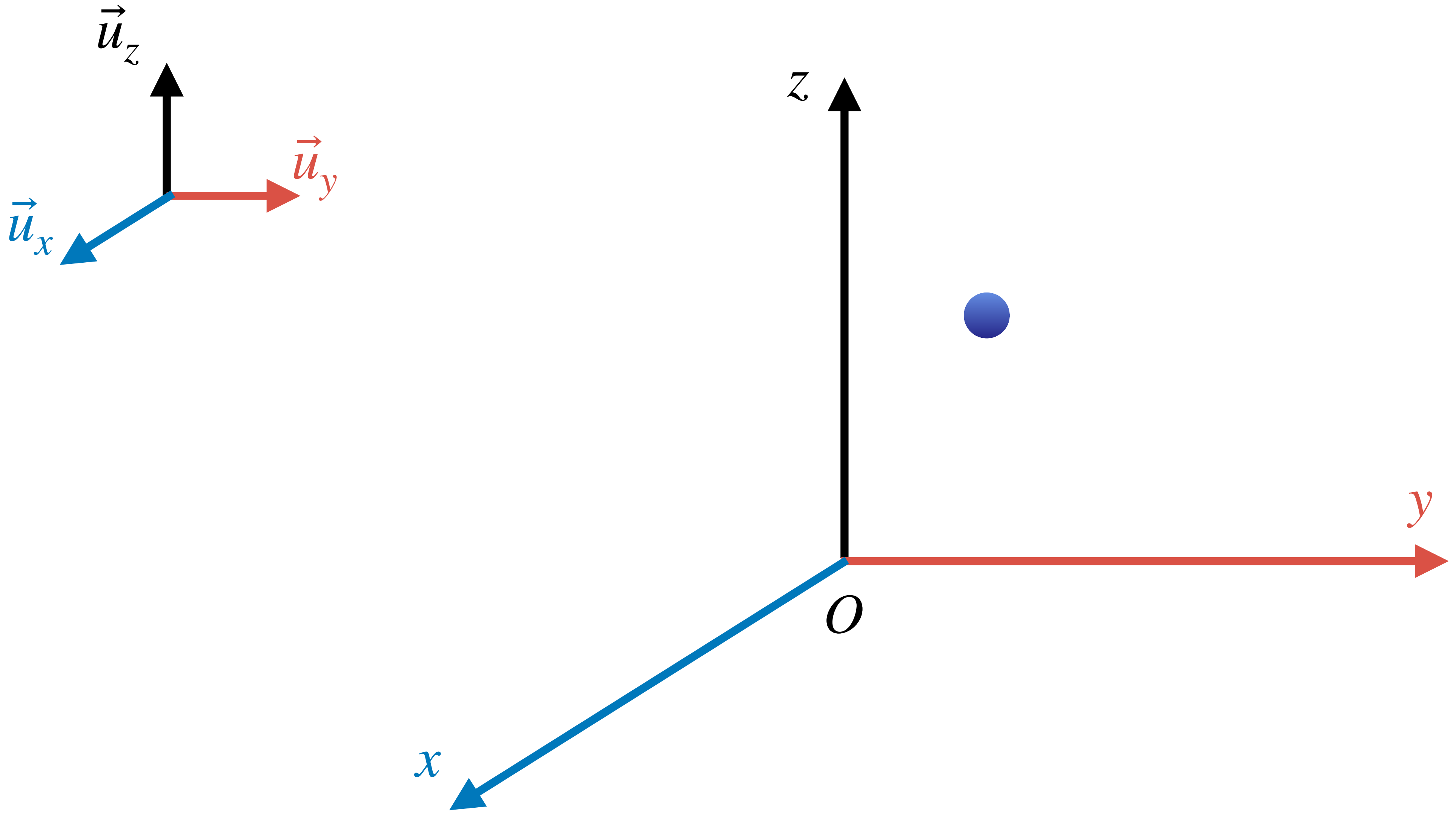
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



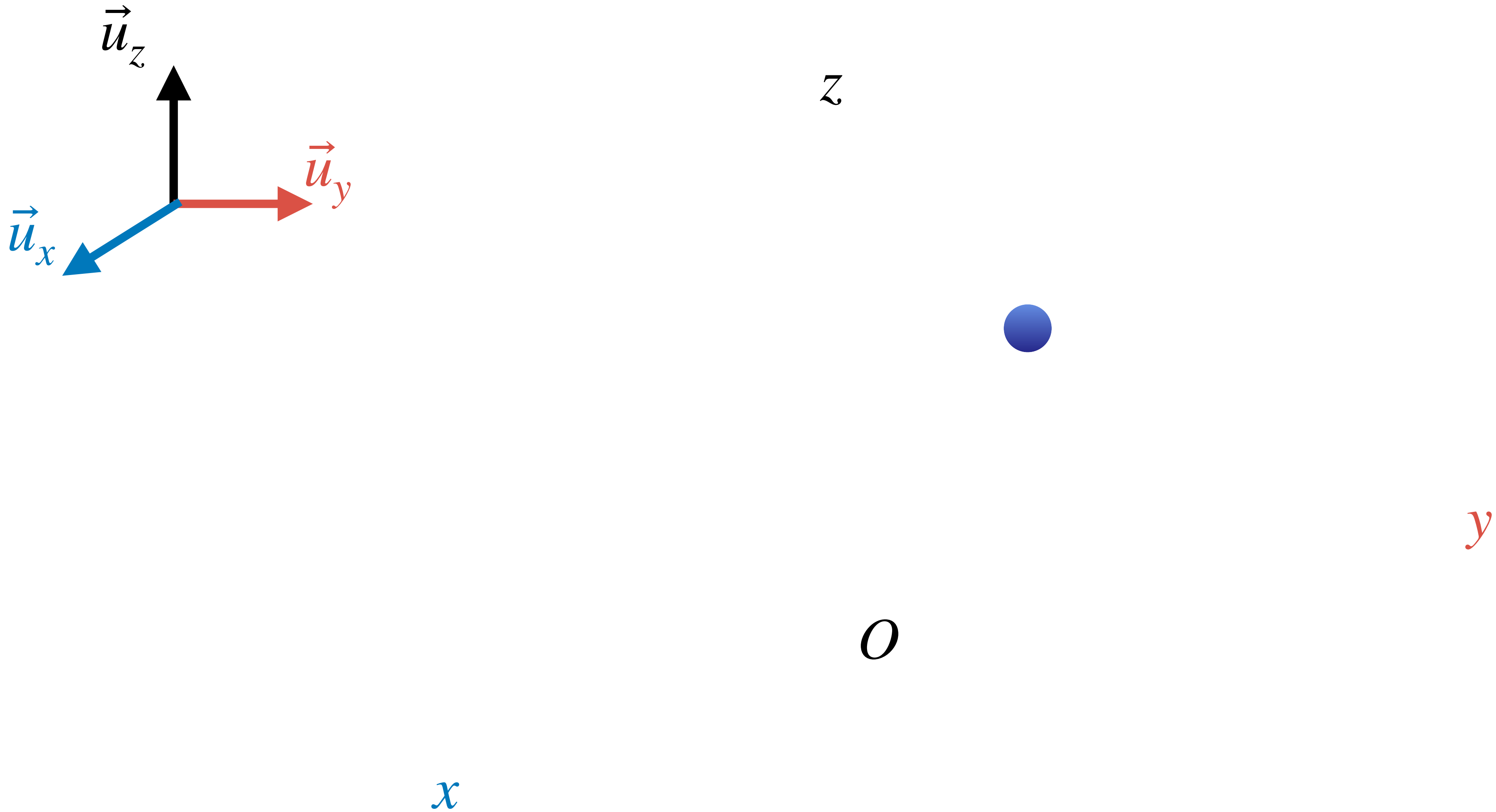
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



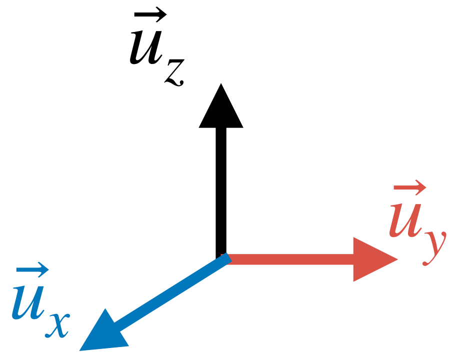
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

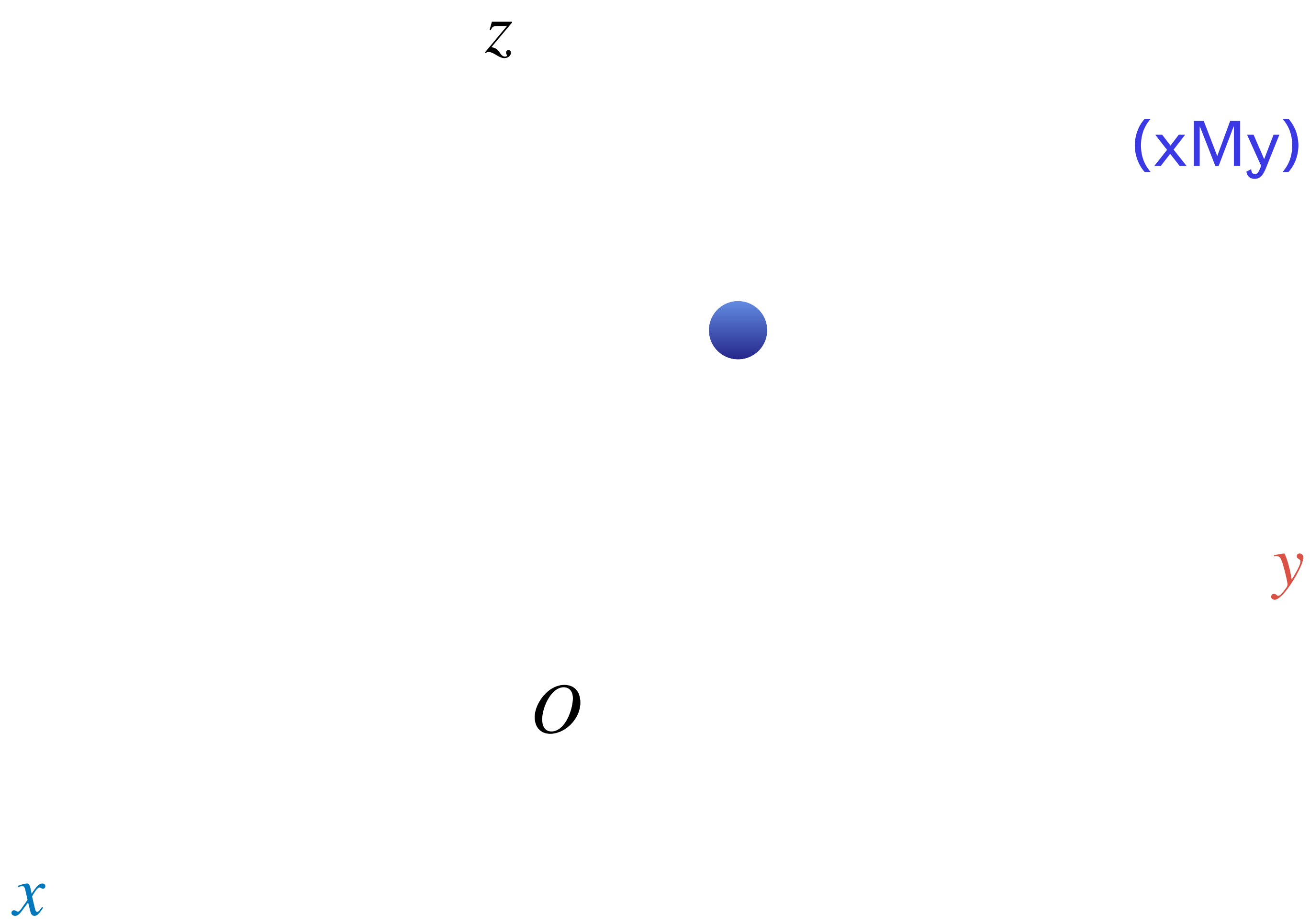
Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées

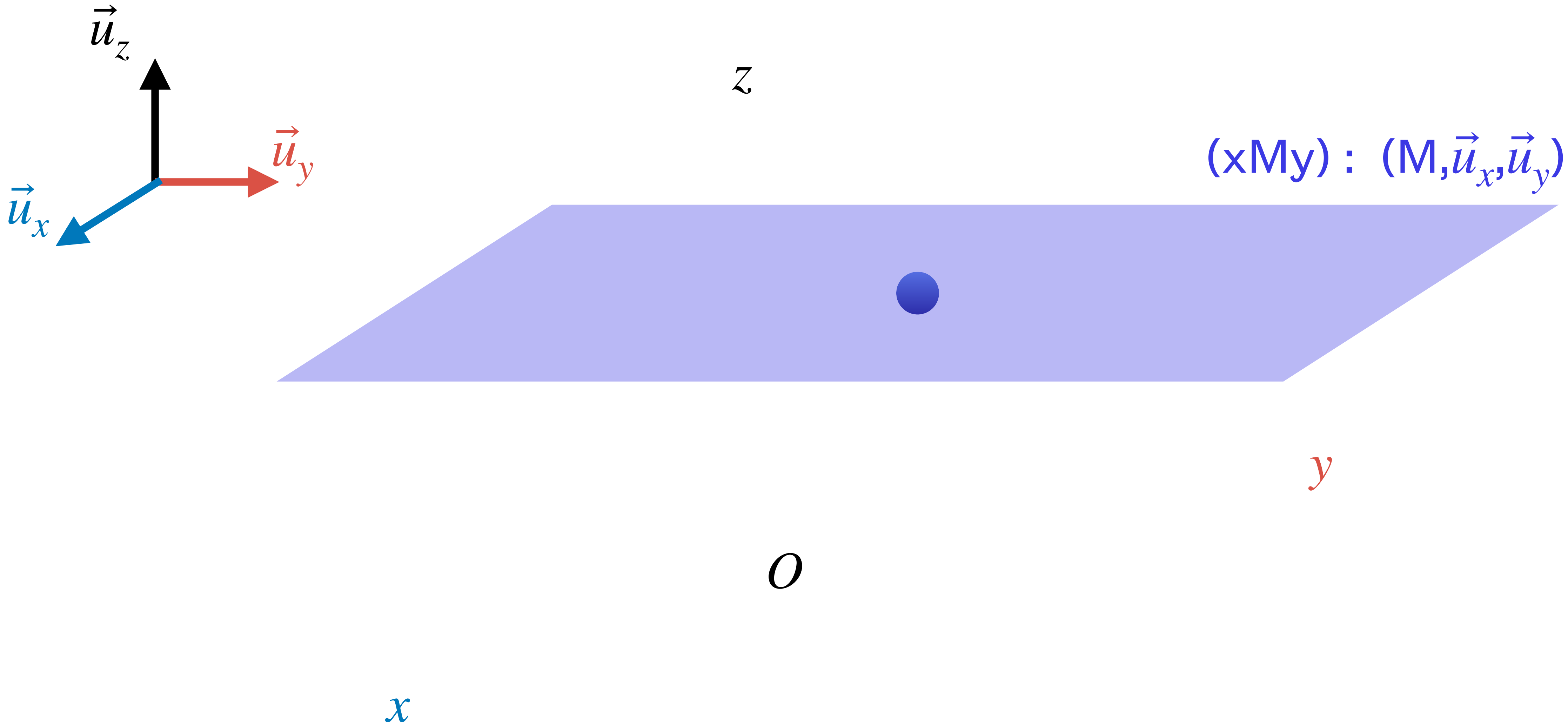




(xMy) : $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$

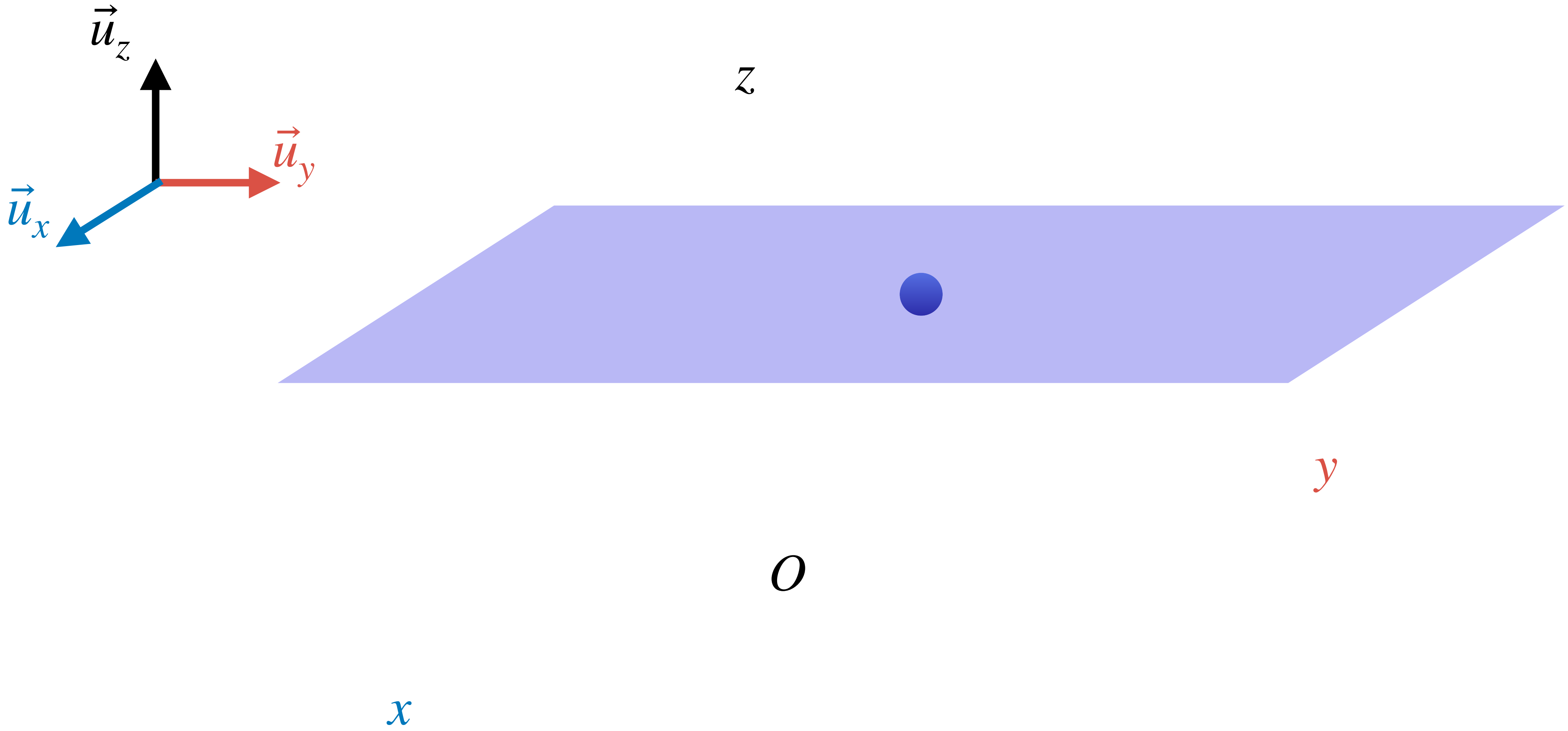
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



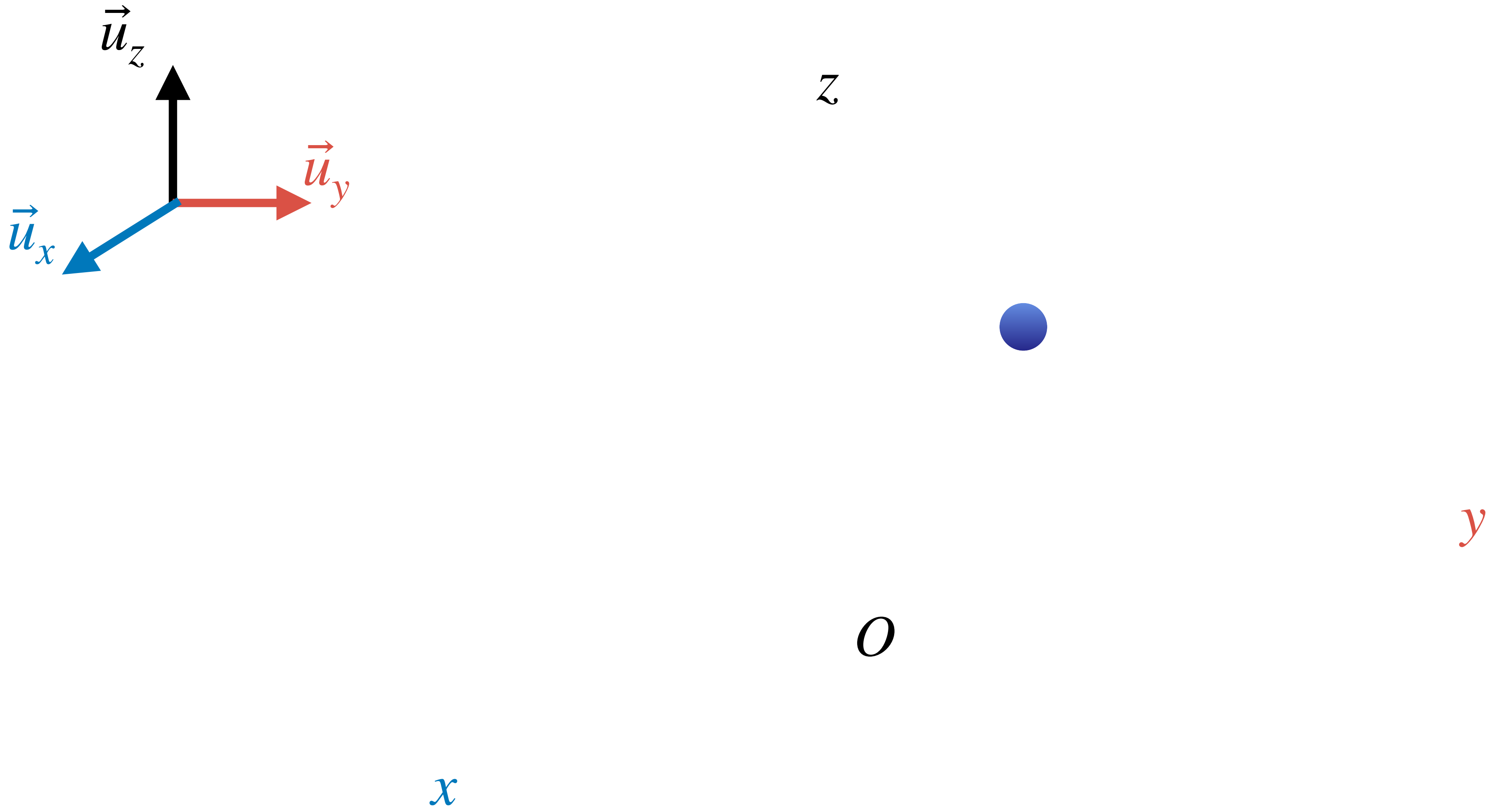
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



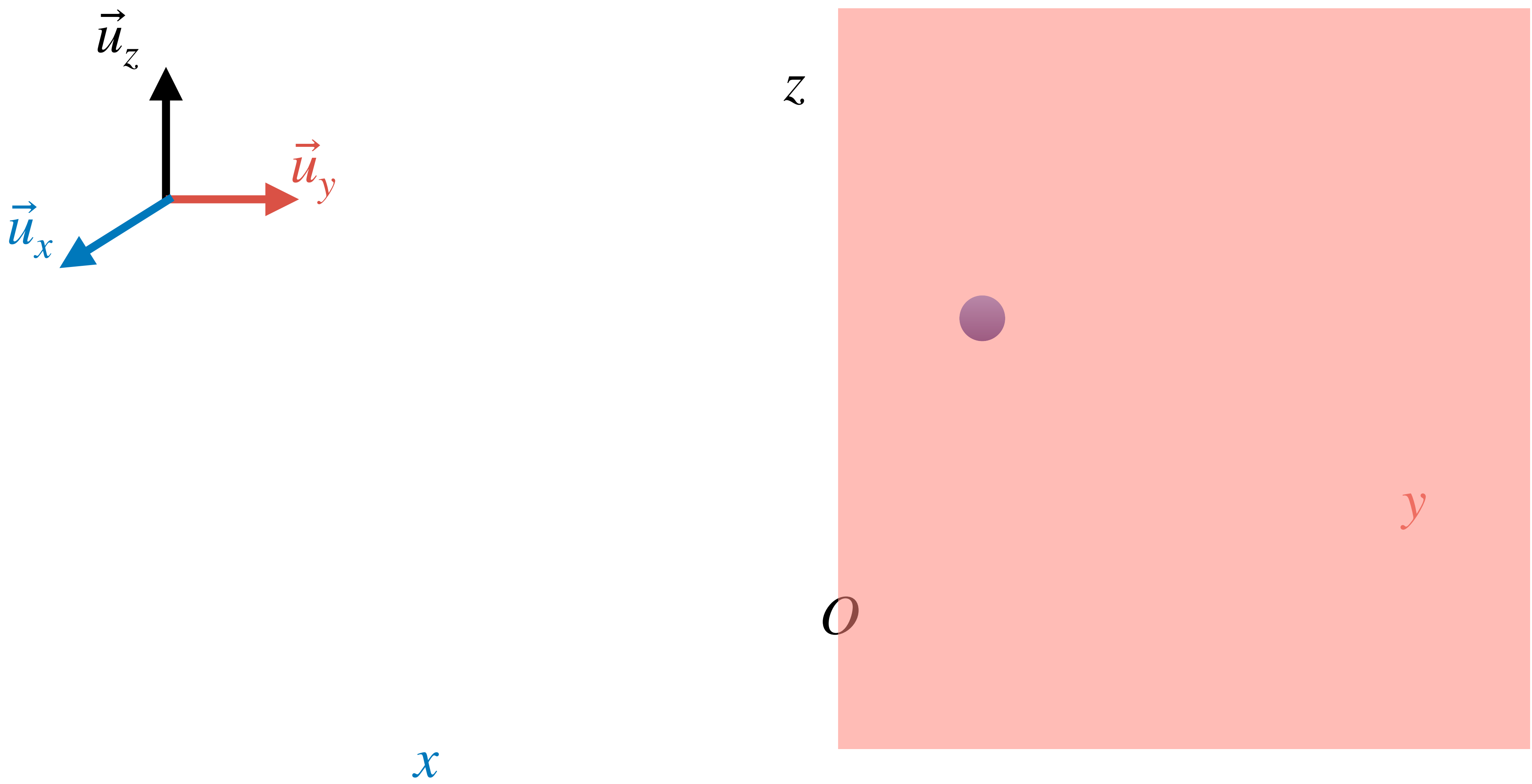
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



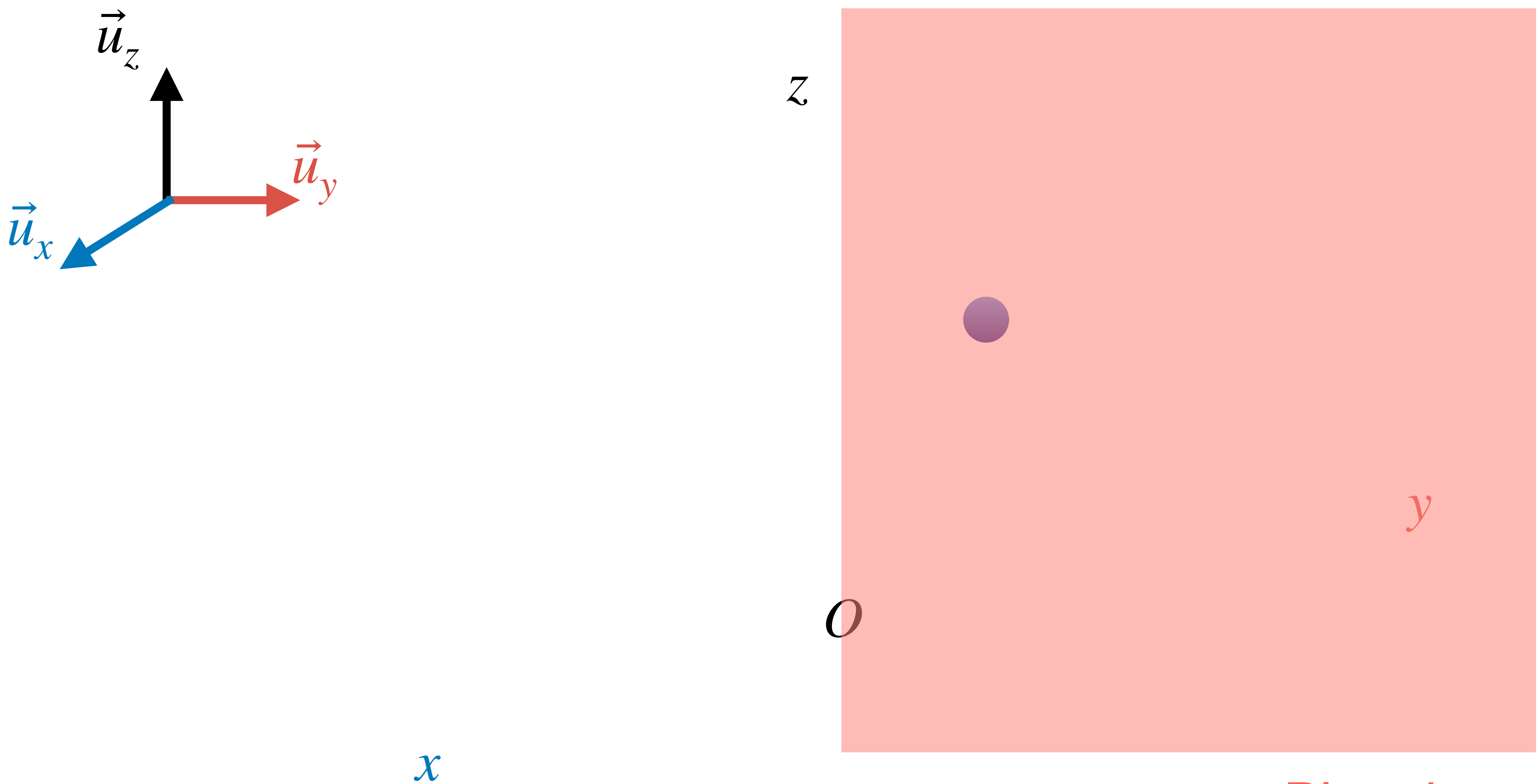
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES CARTÉSIENNES

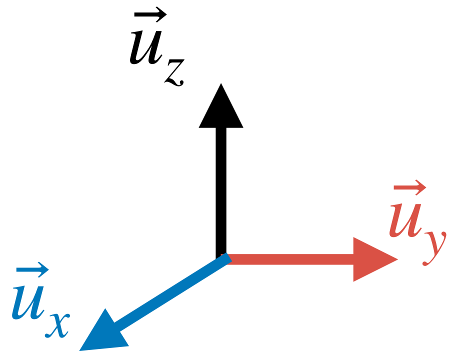
Parenthèse : les systèmes de coordonnées

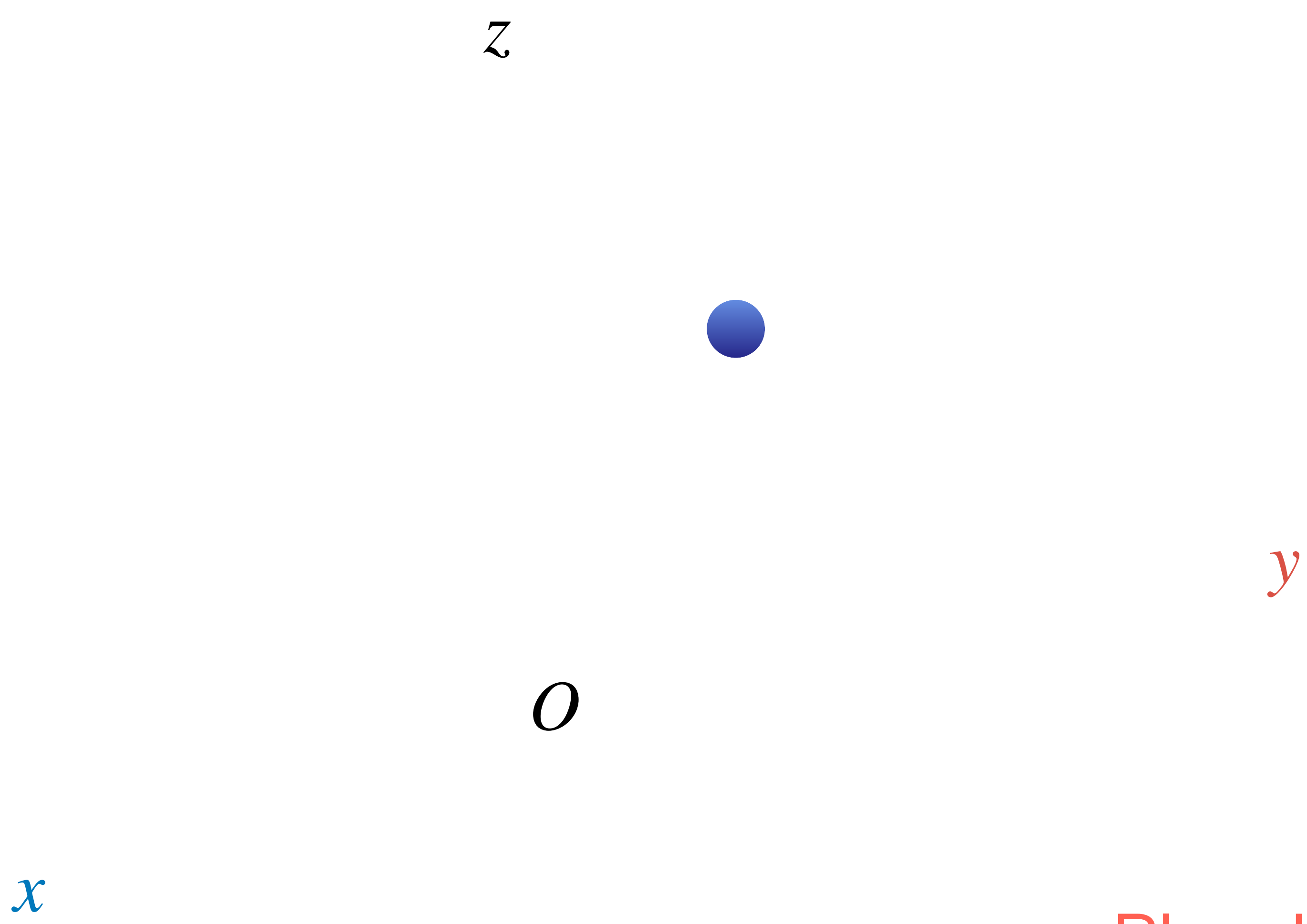


Plan du tableau :
(yMz) : $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées

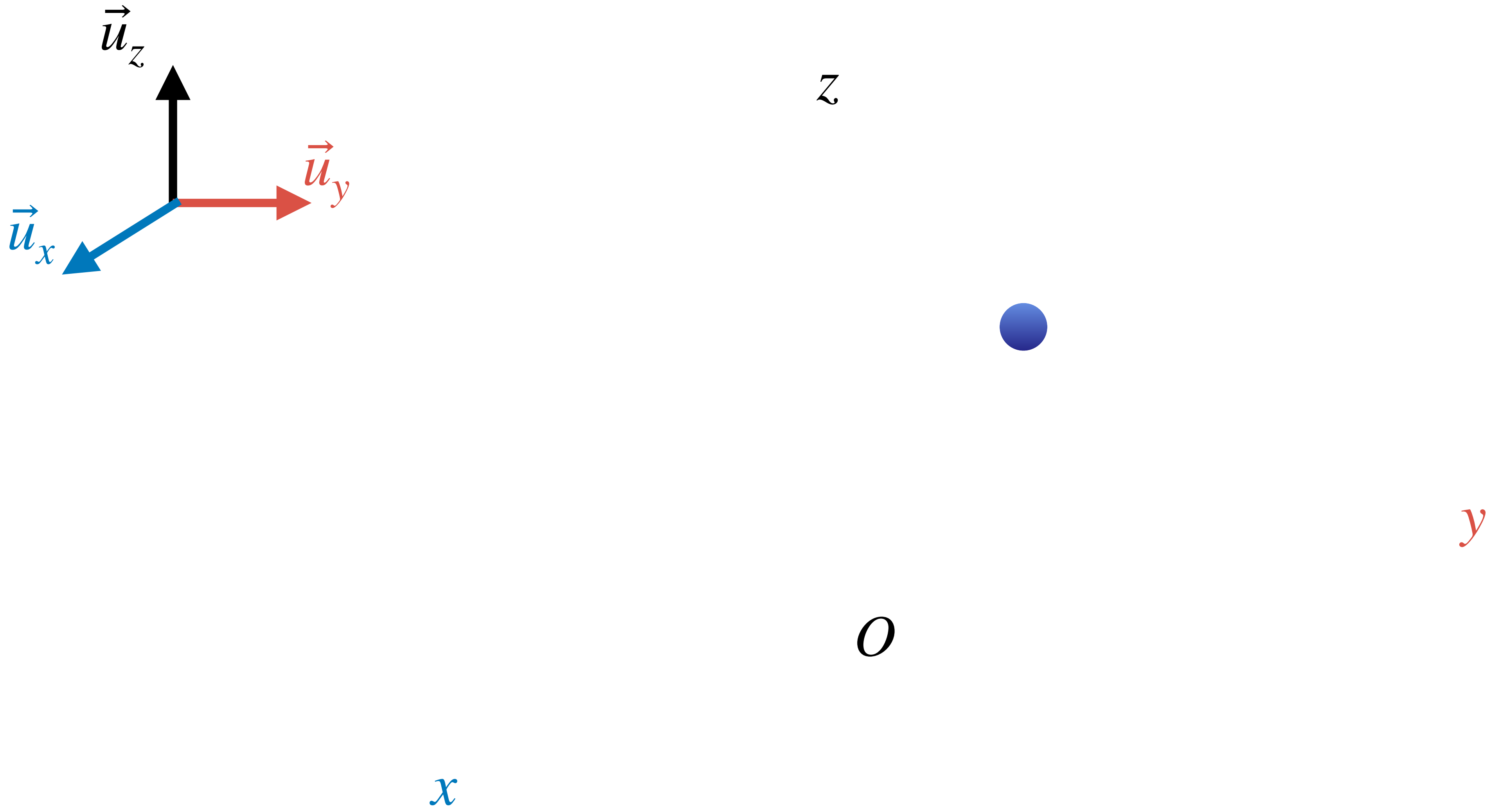




Plan du tableau :
(yMz) : $(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$

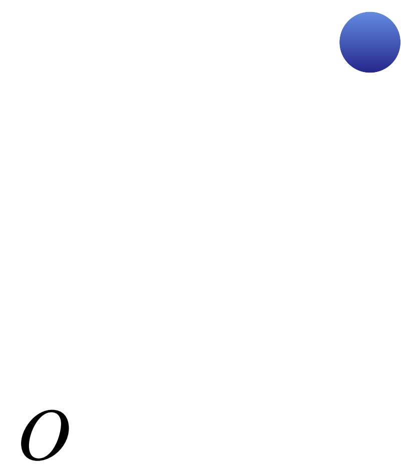
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



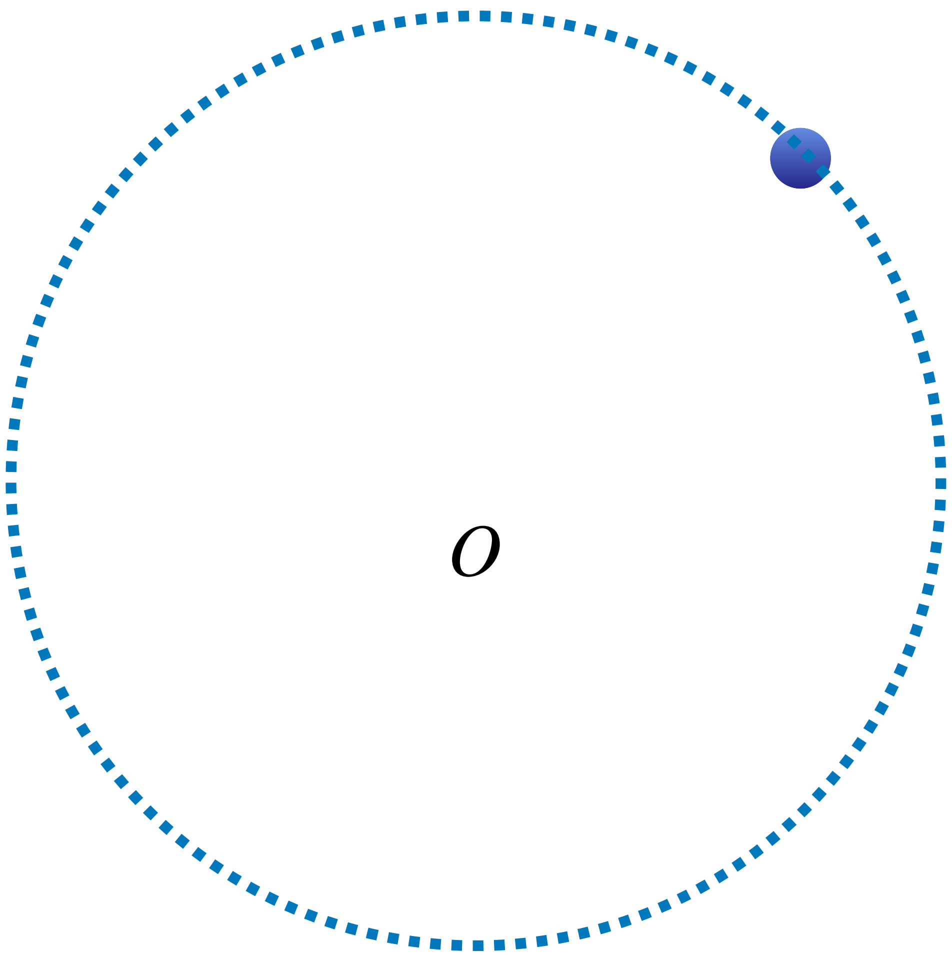
COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



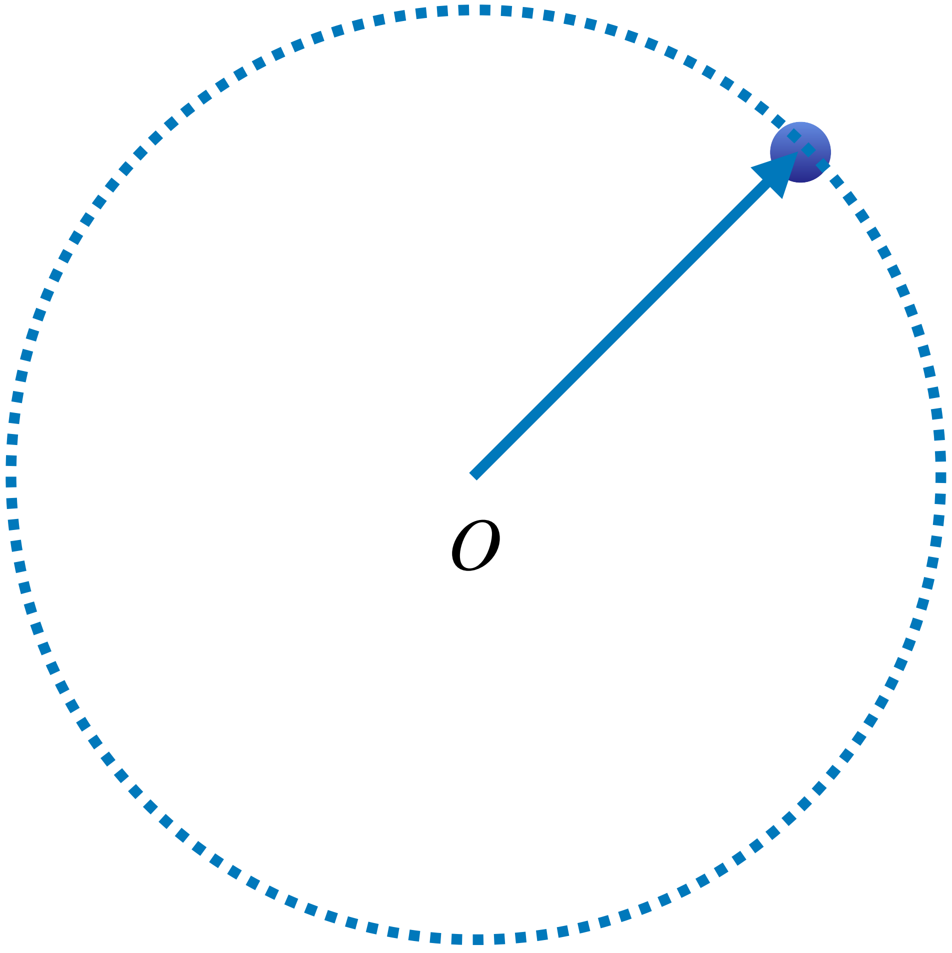
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



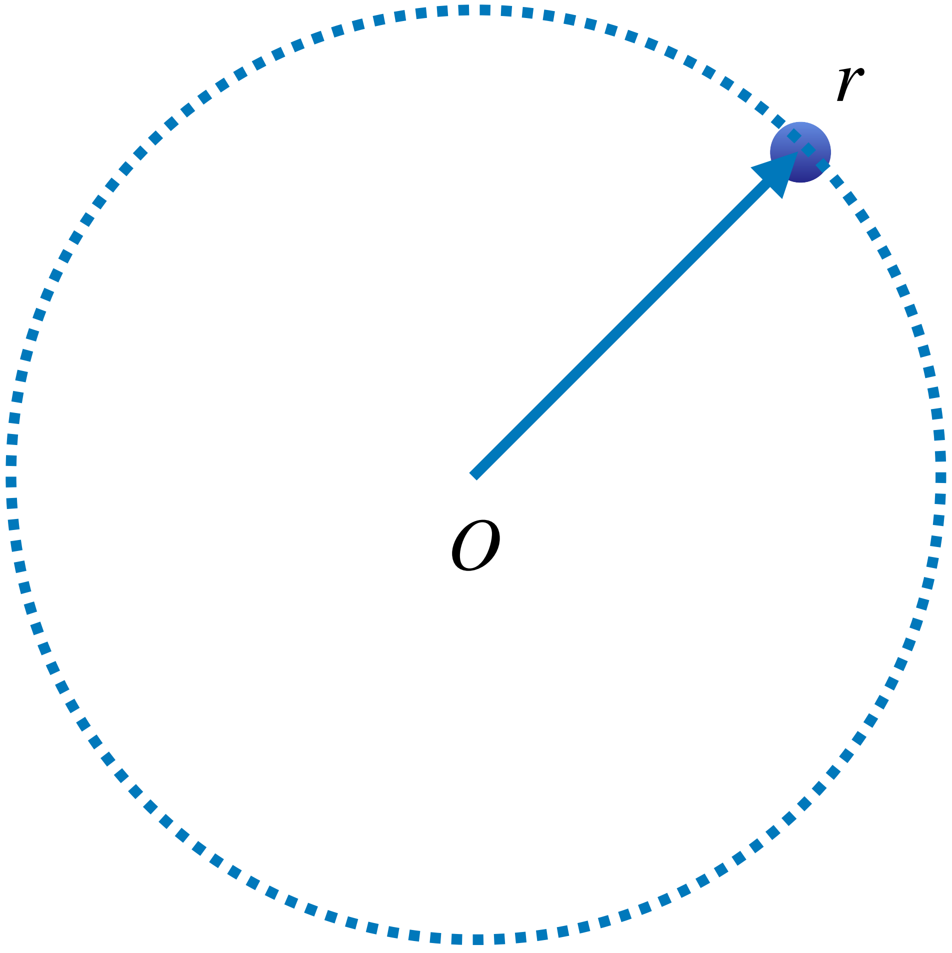
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



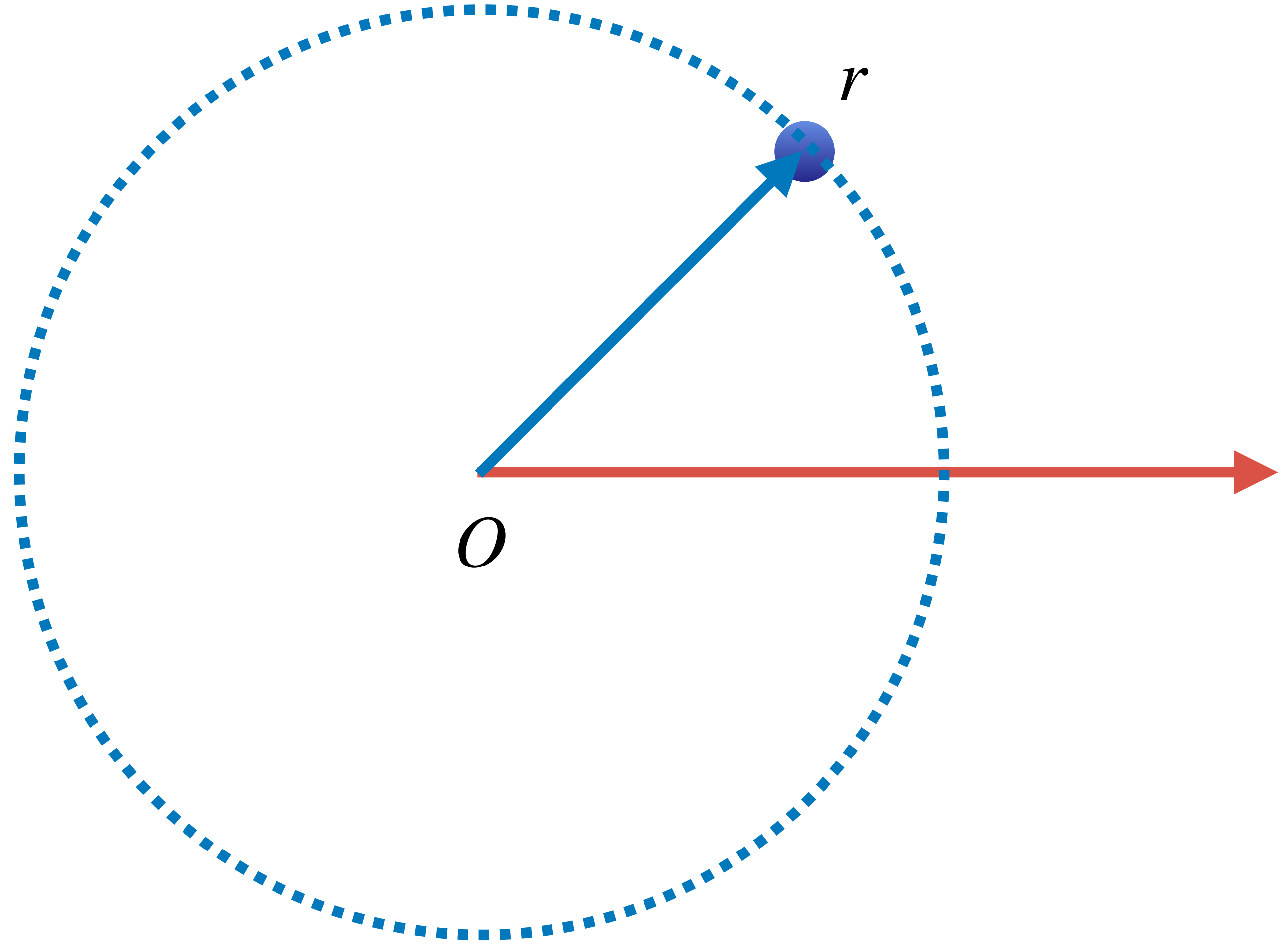
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



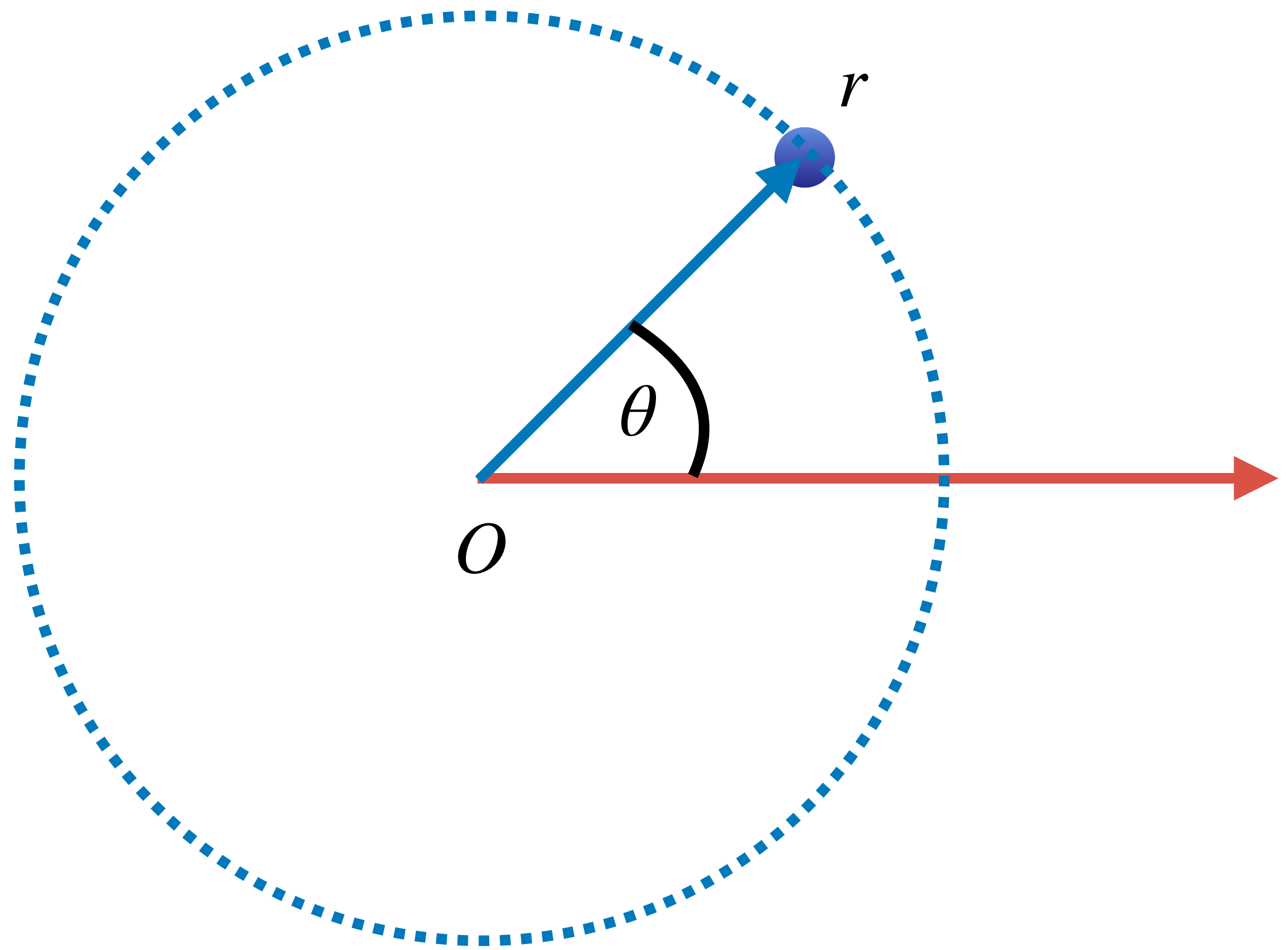
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



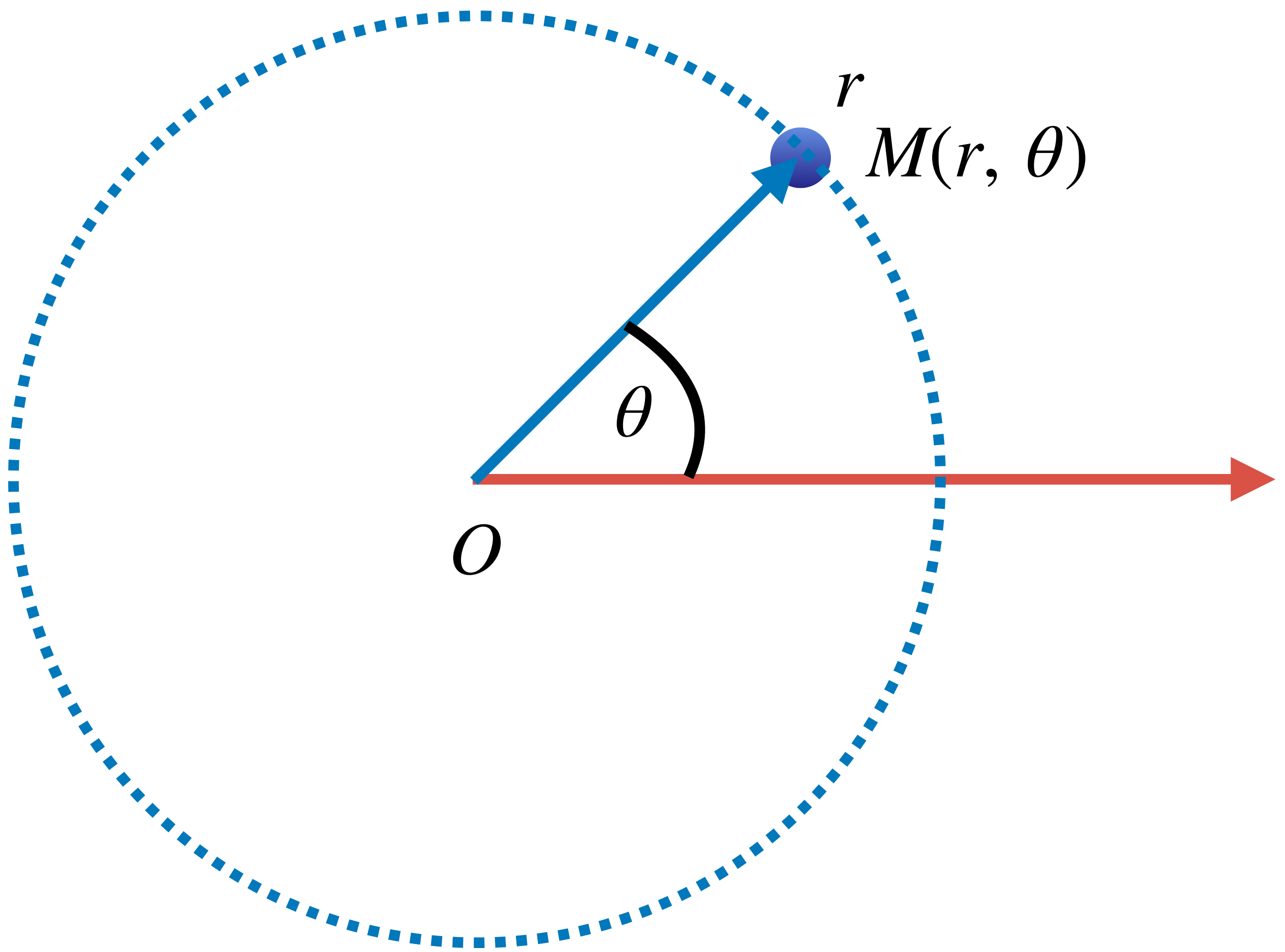
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



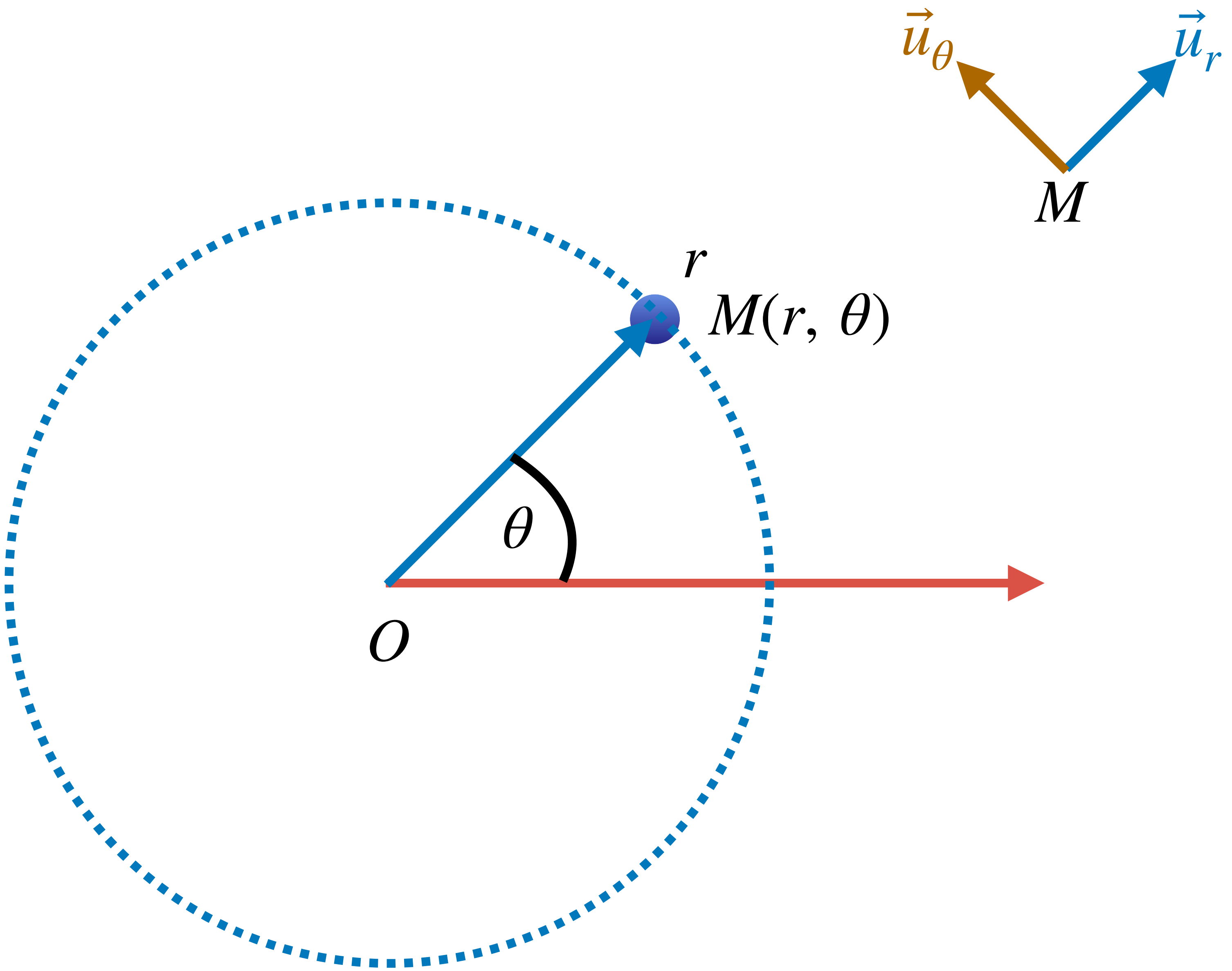
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



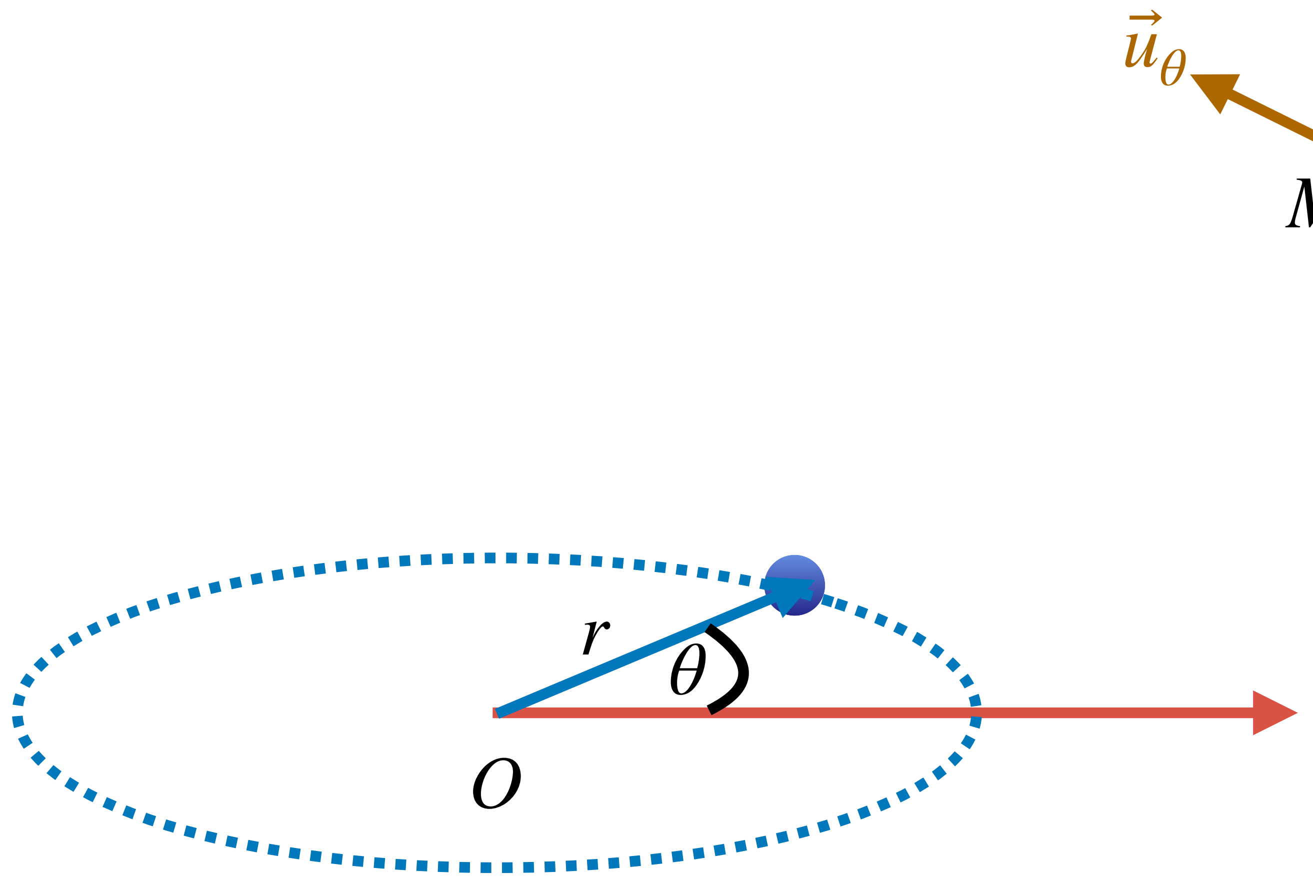
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



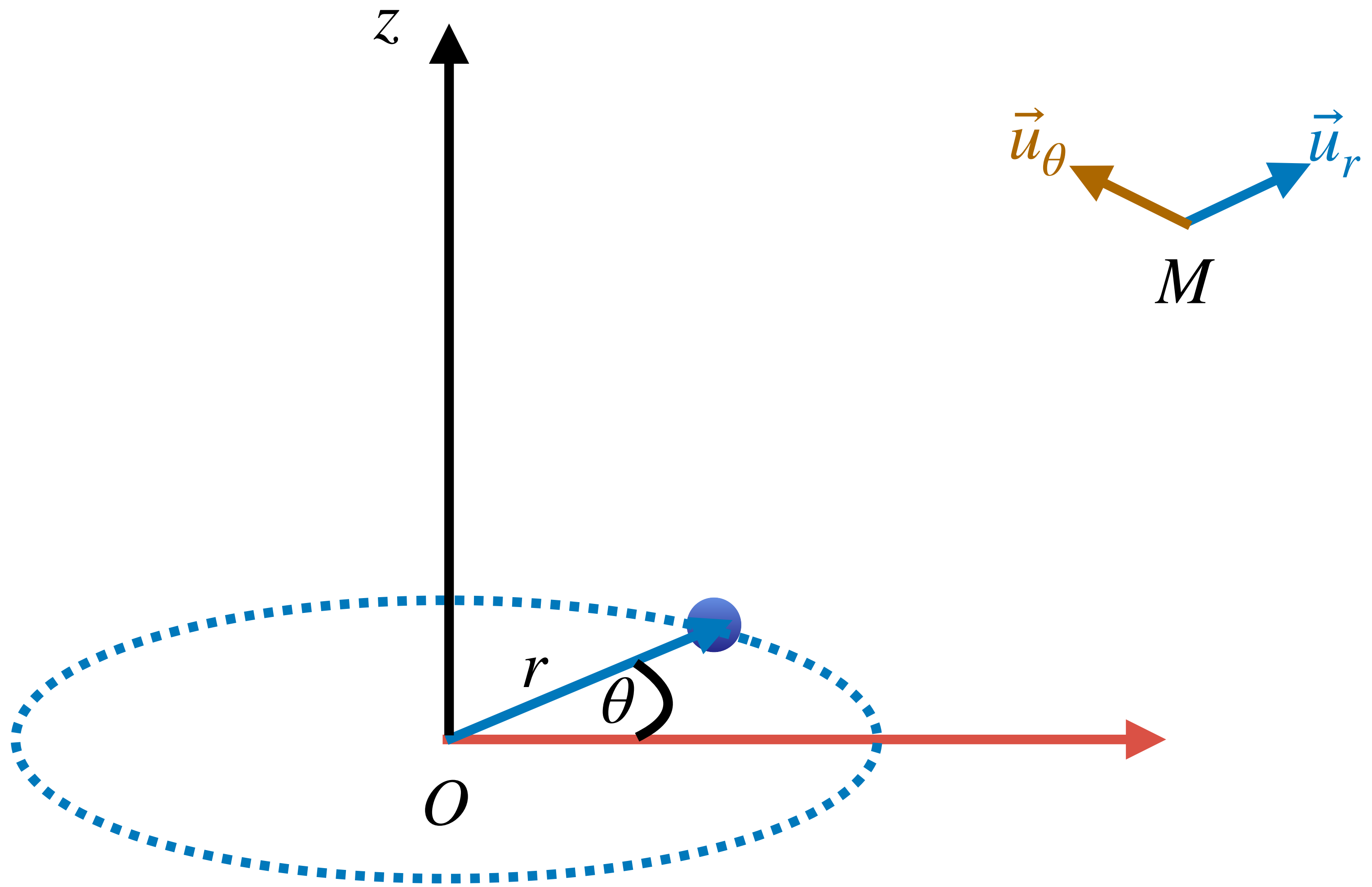
COORDONNÉES POLAIRES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



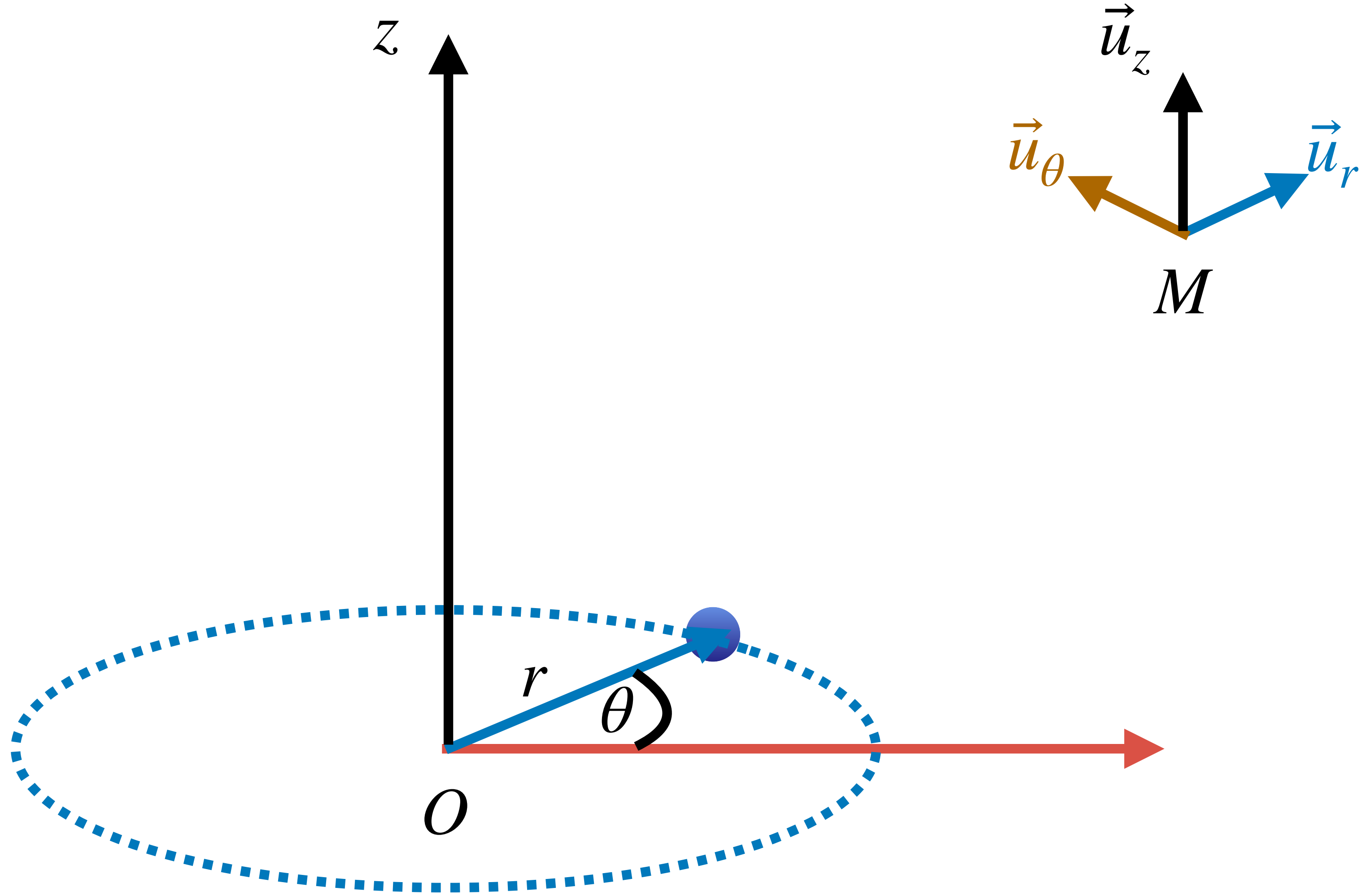
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



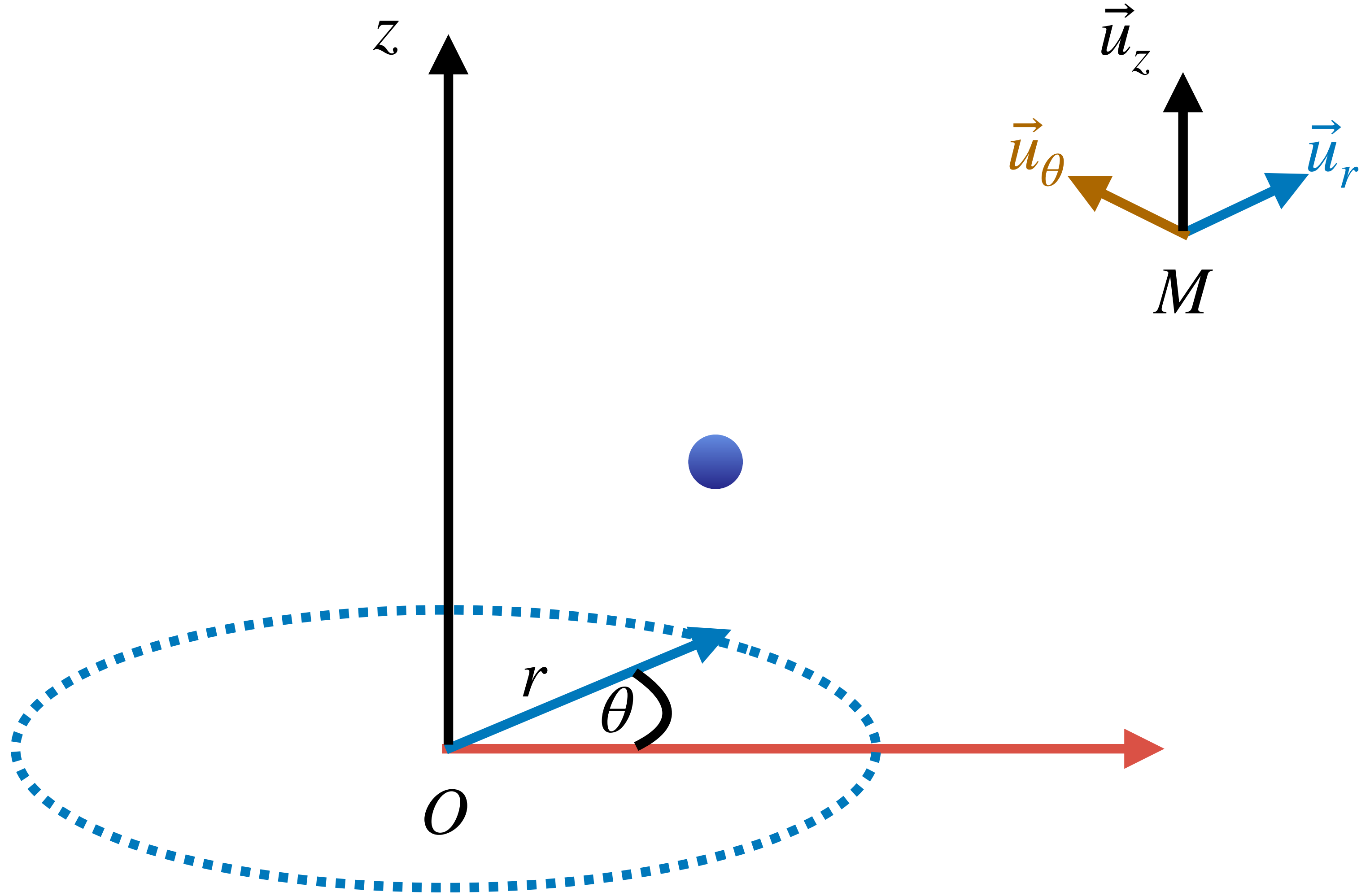
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



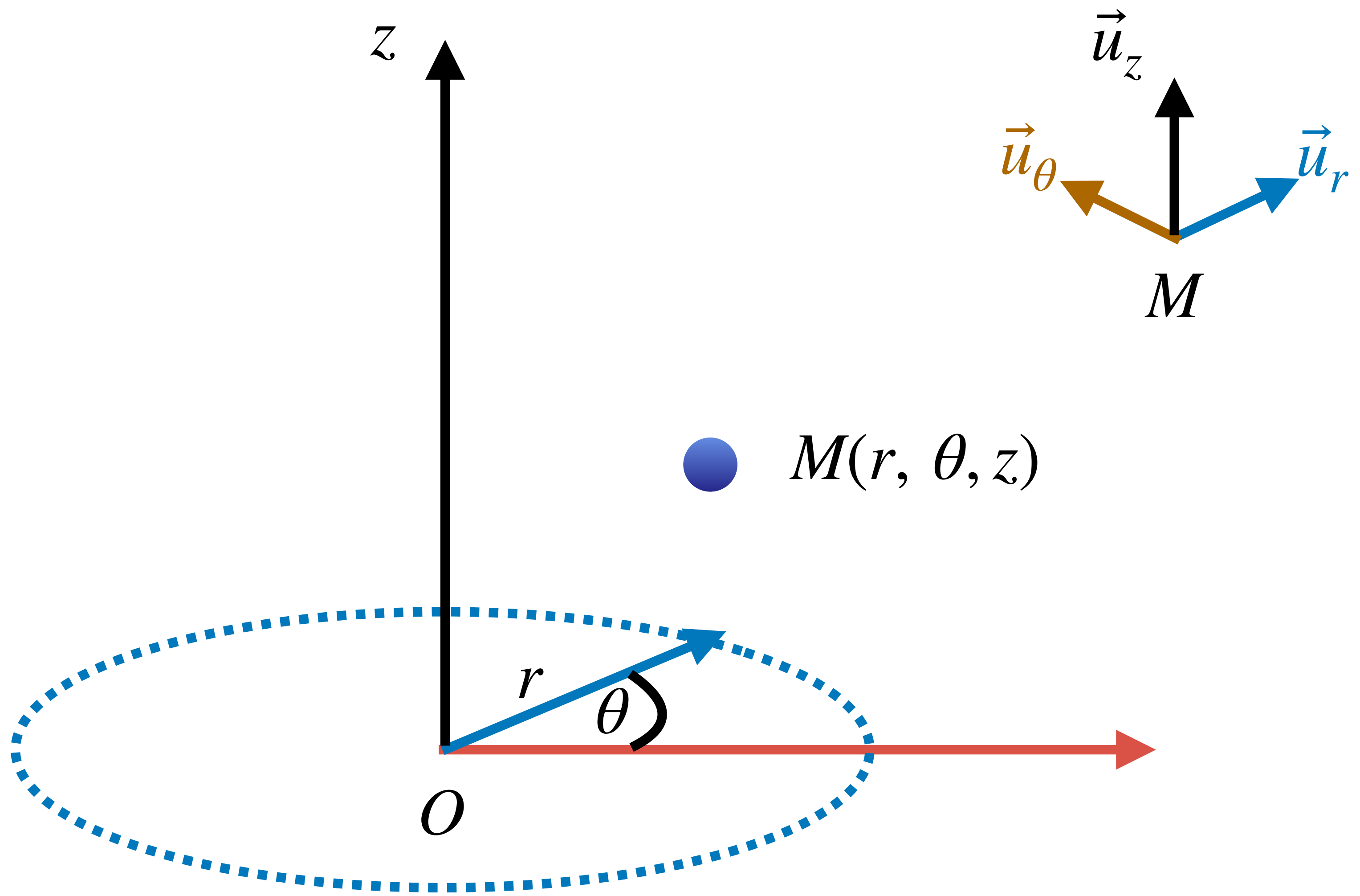
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



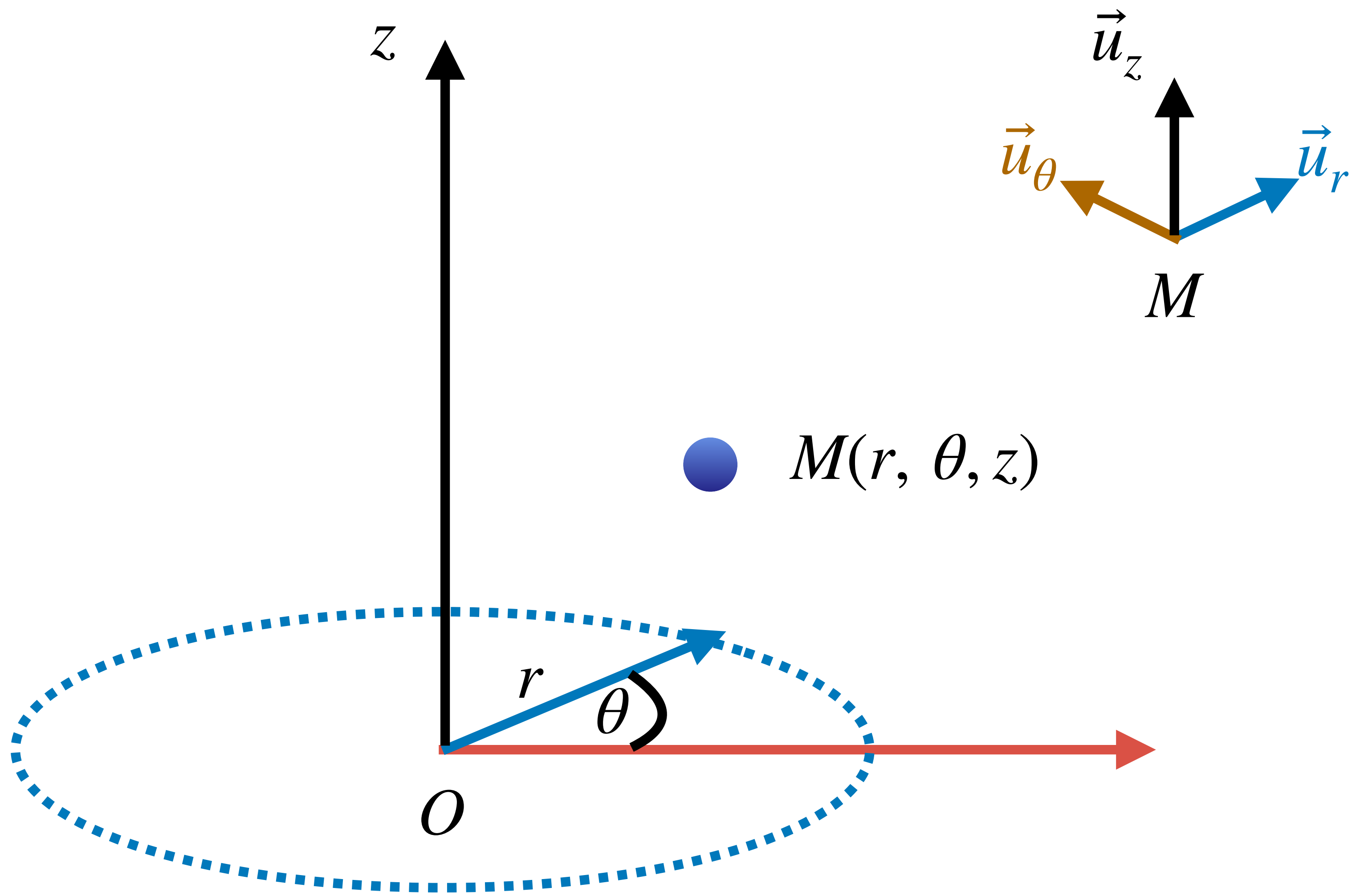
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

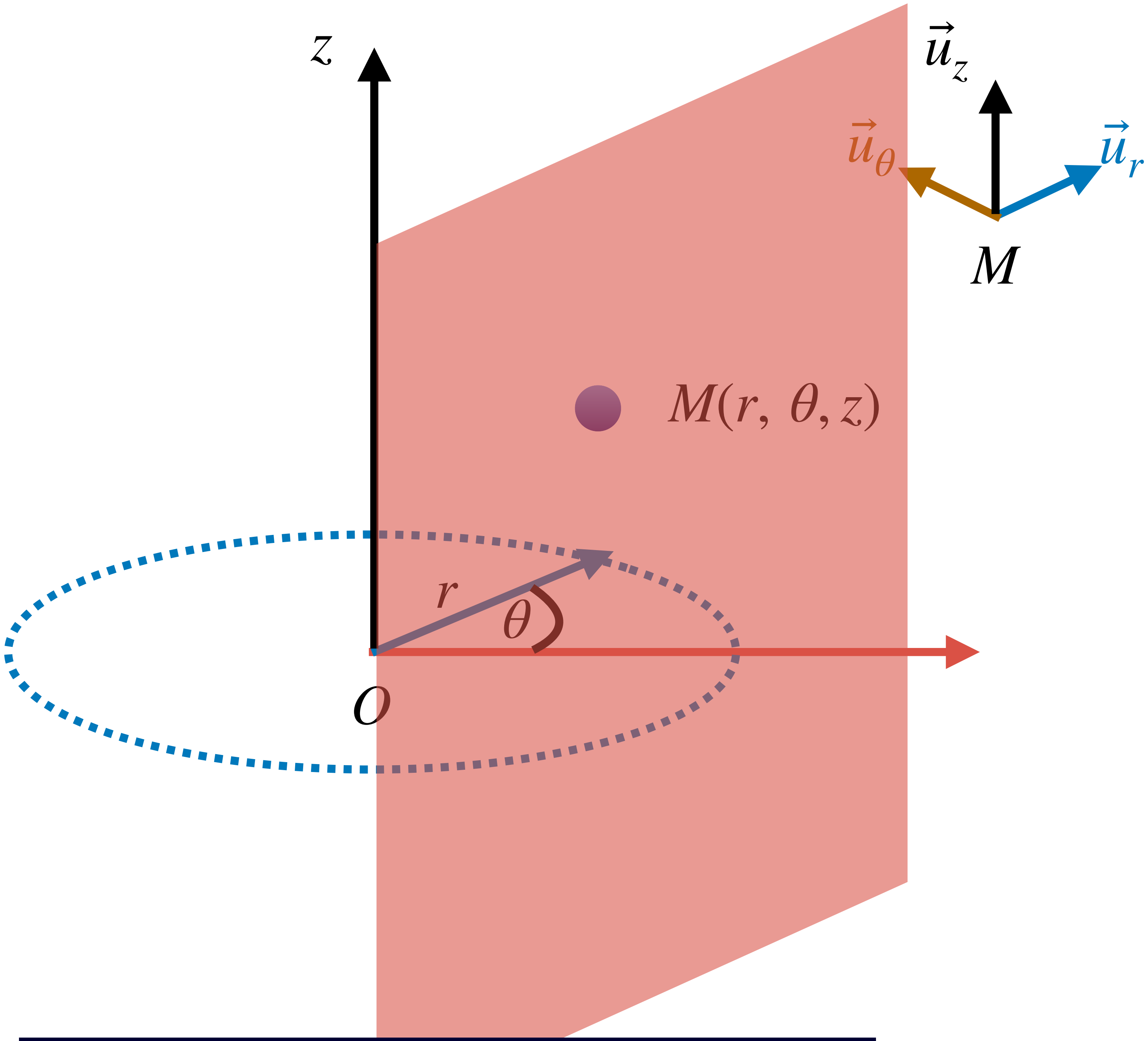
Parenthèse : les systèmes de coordonnées



Le vecteur $\vec{u}_r$ va de l'axe vers le point

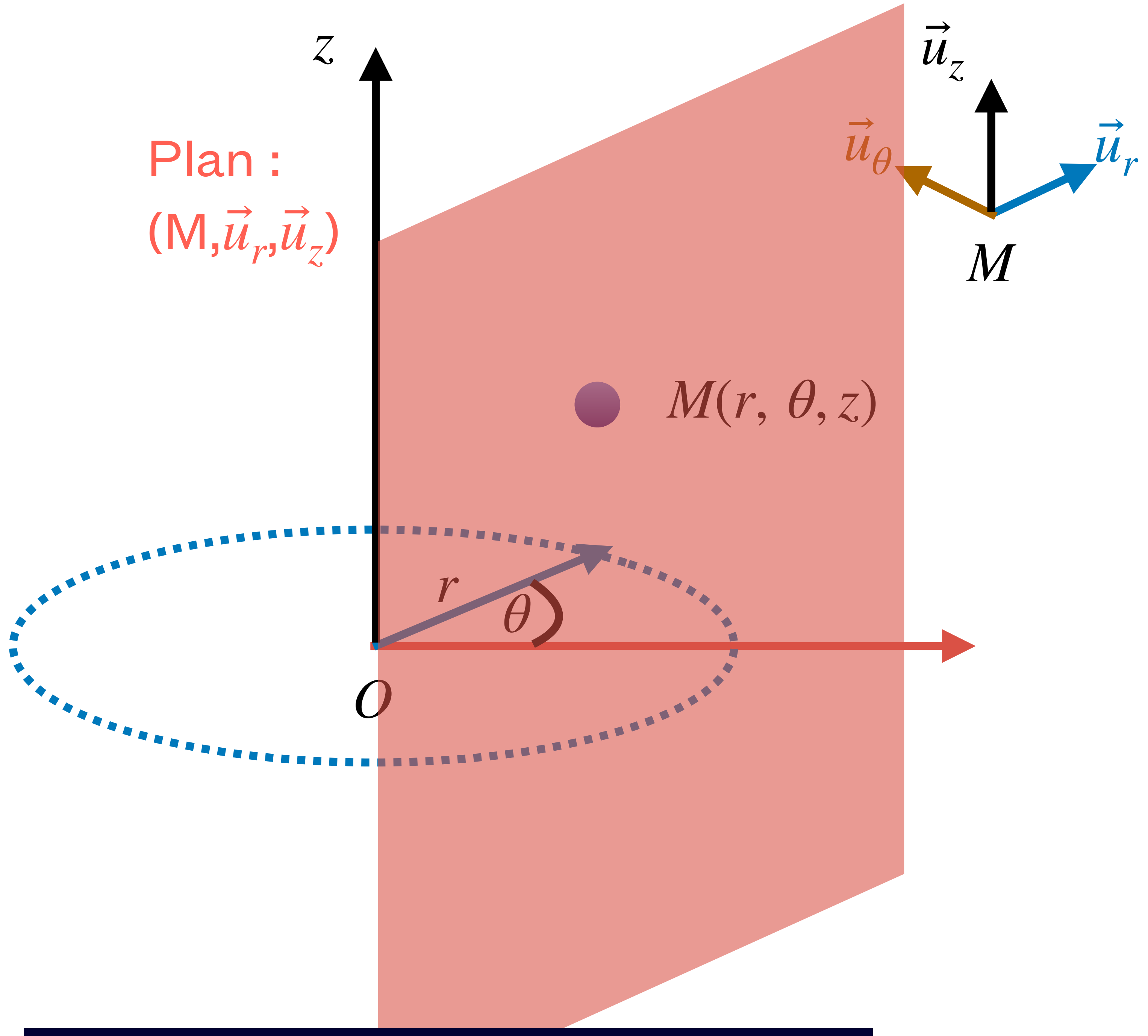
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



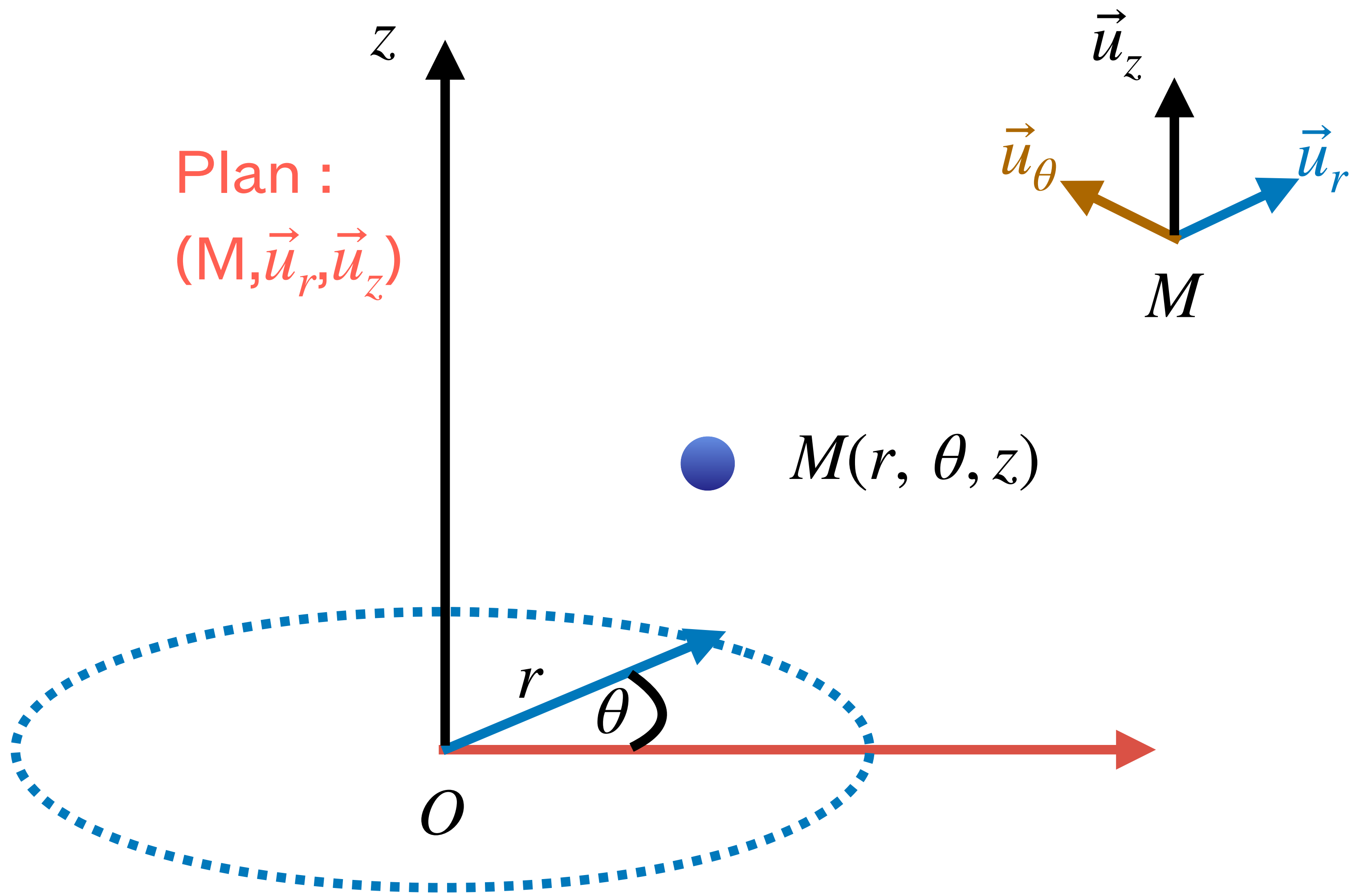
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



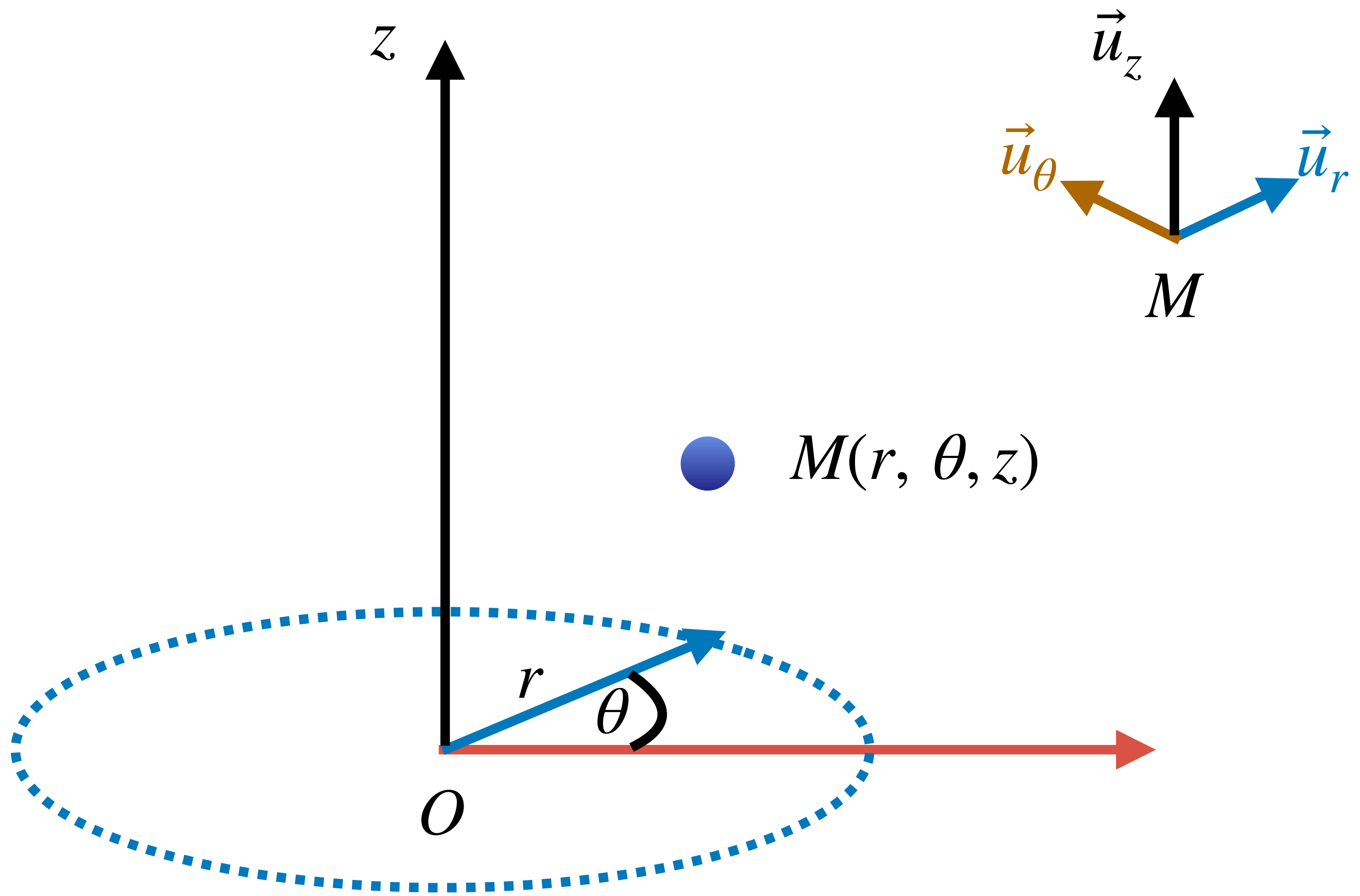
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



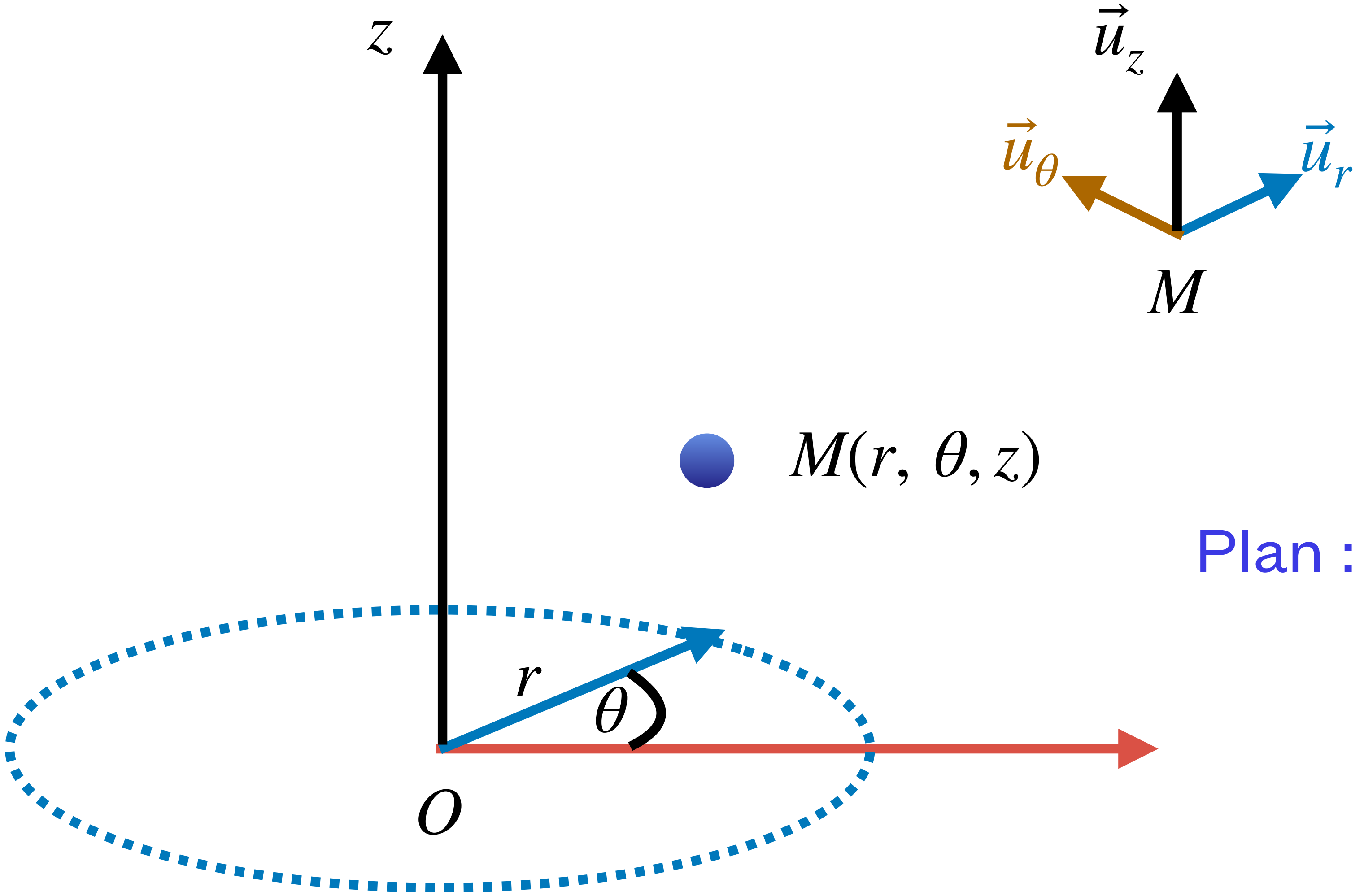
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES CYLINDRIQUES

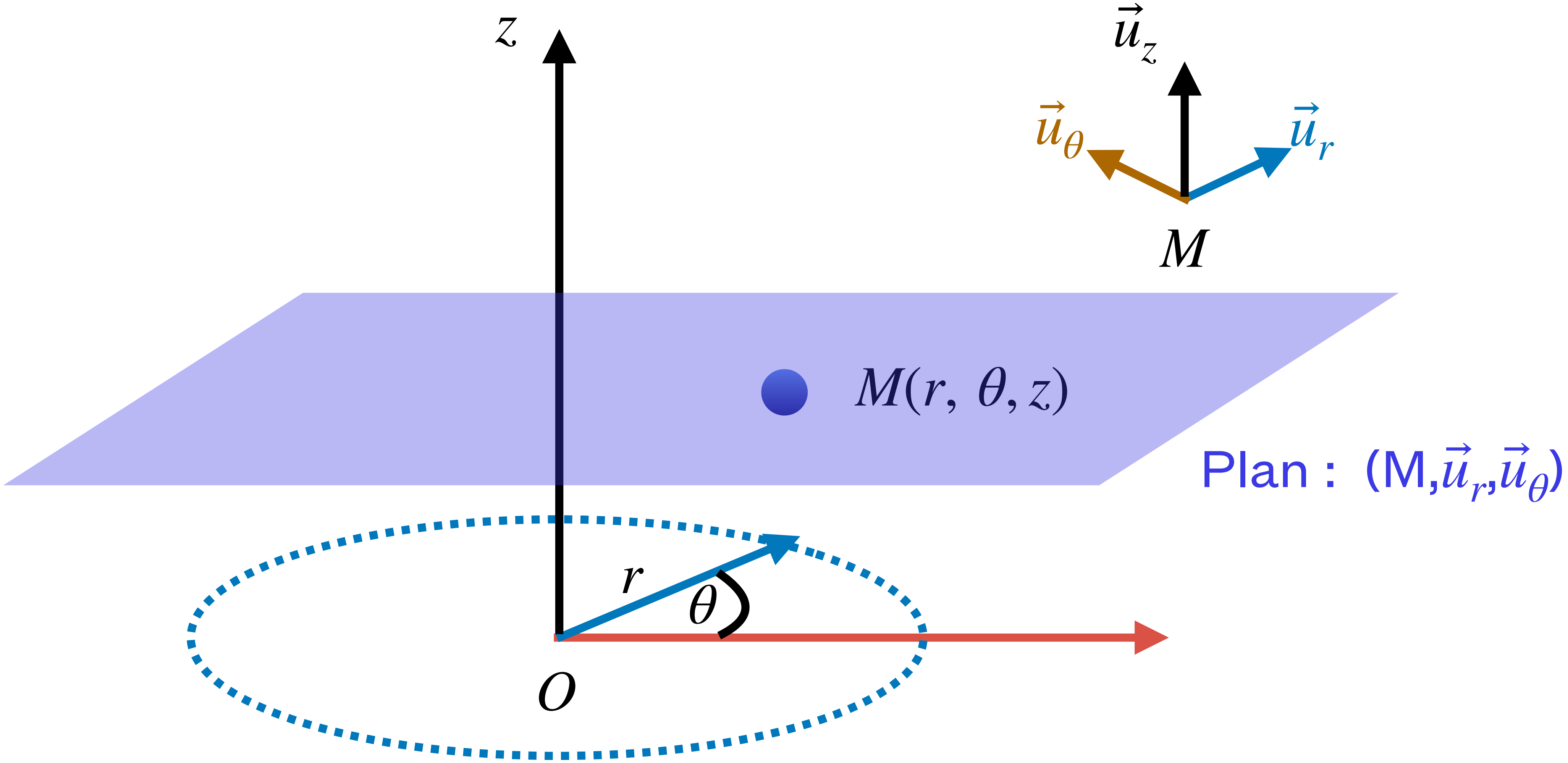
Parenthèse : les systèmes de coordonnées



Plan : (M,$\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$)

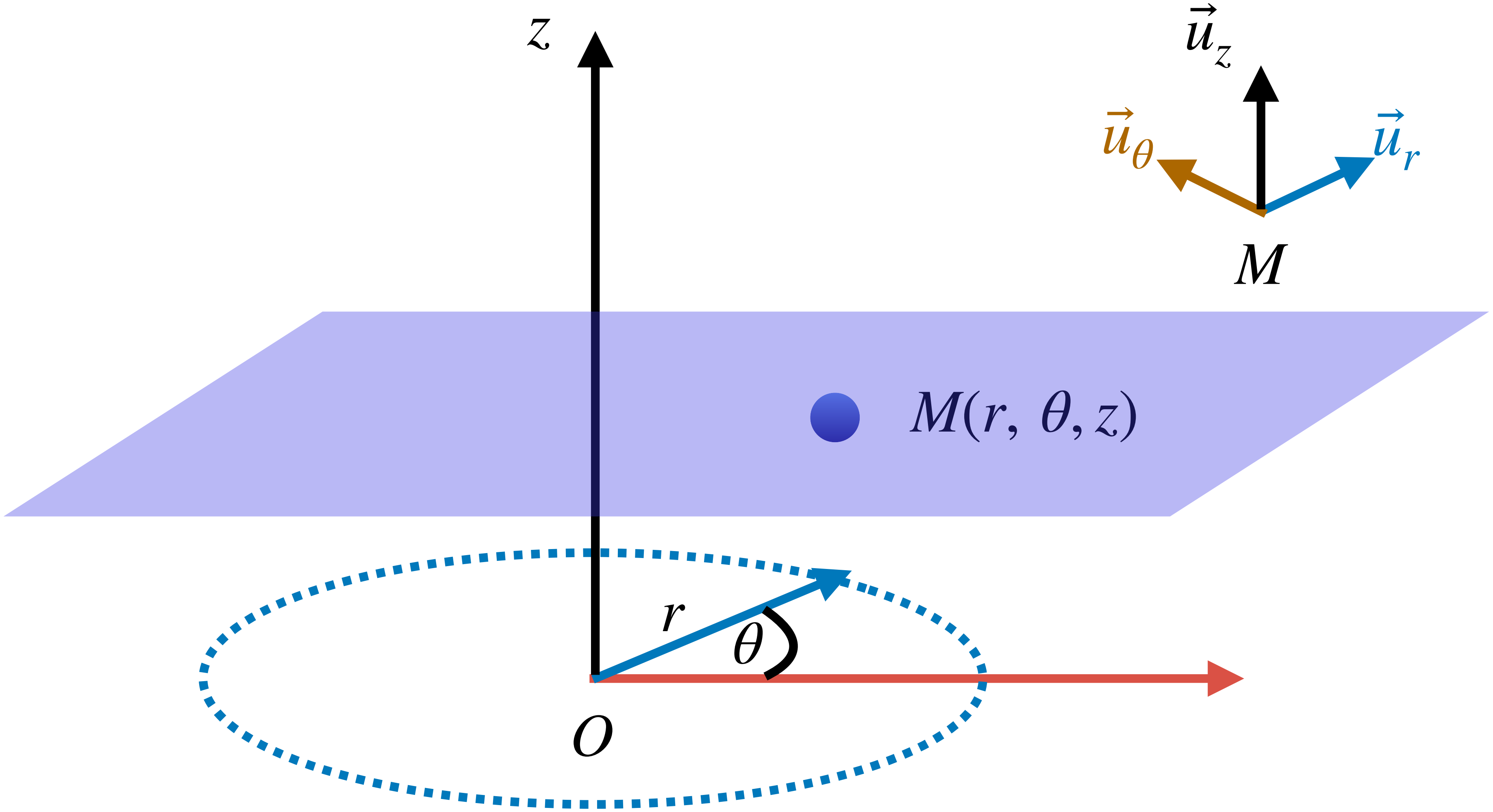
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



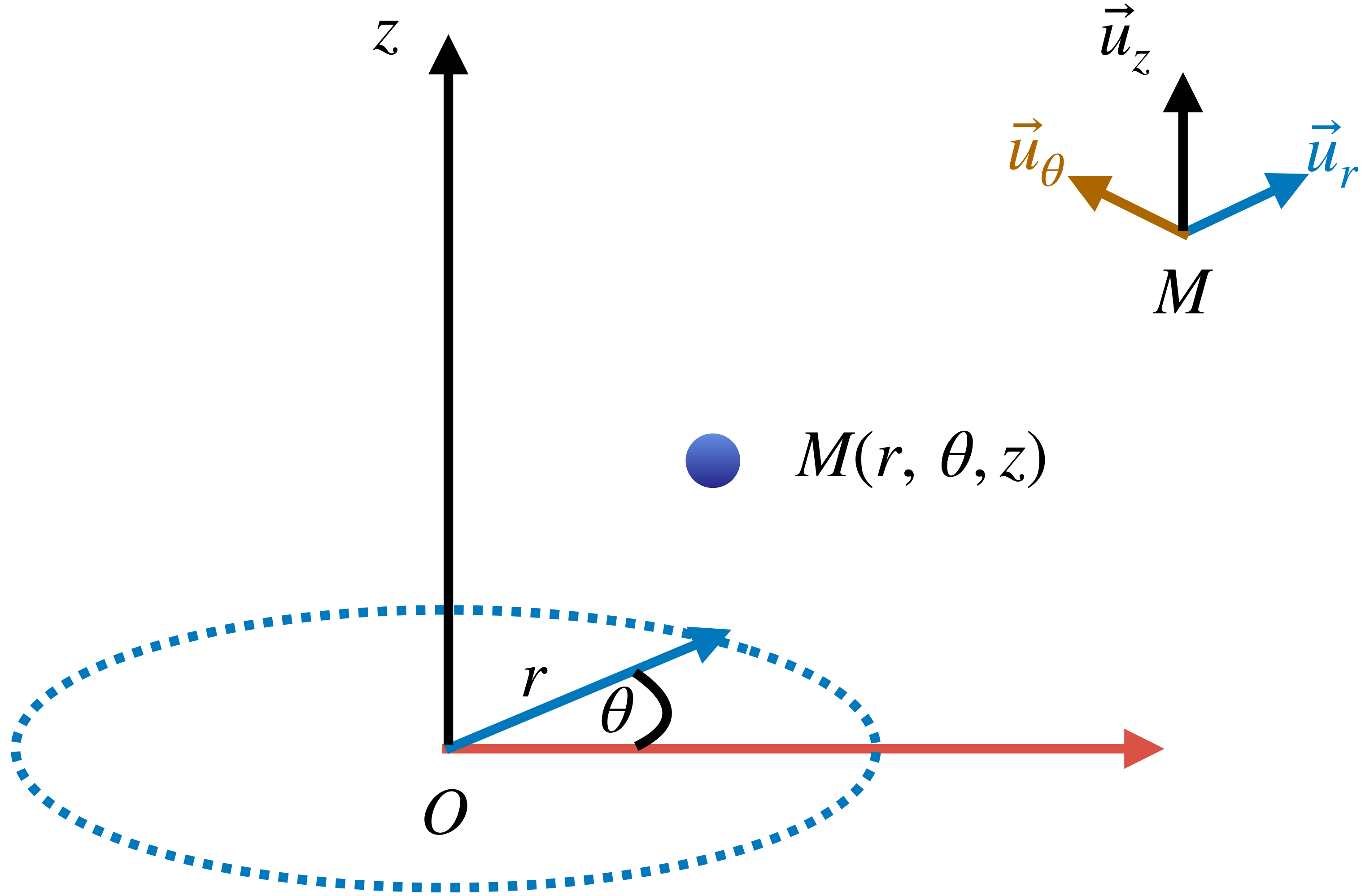
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



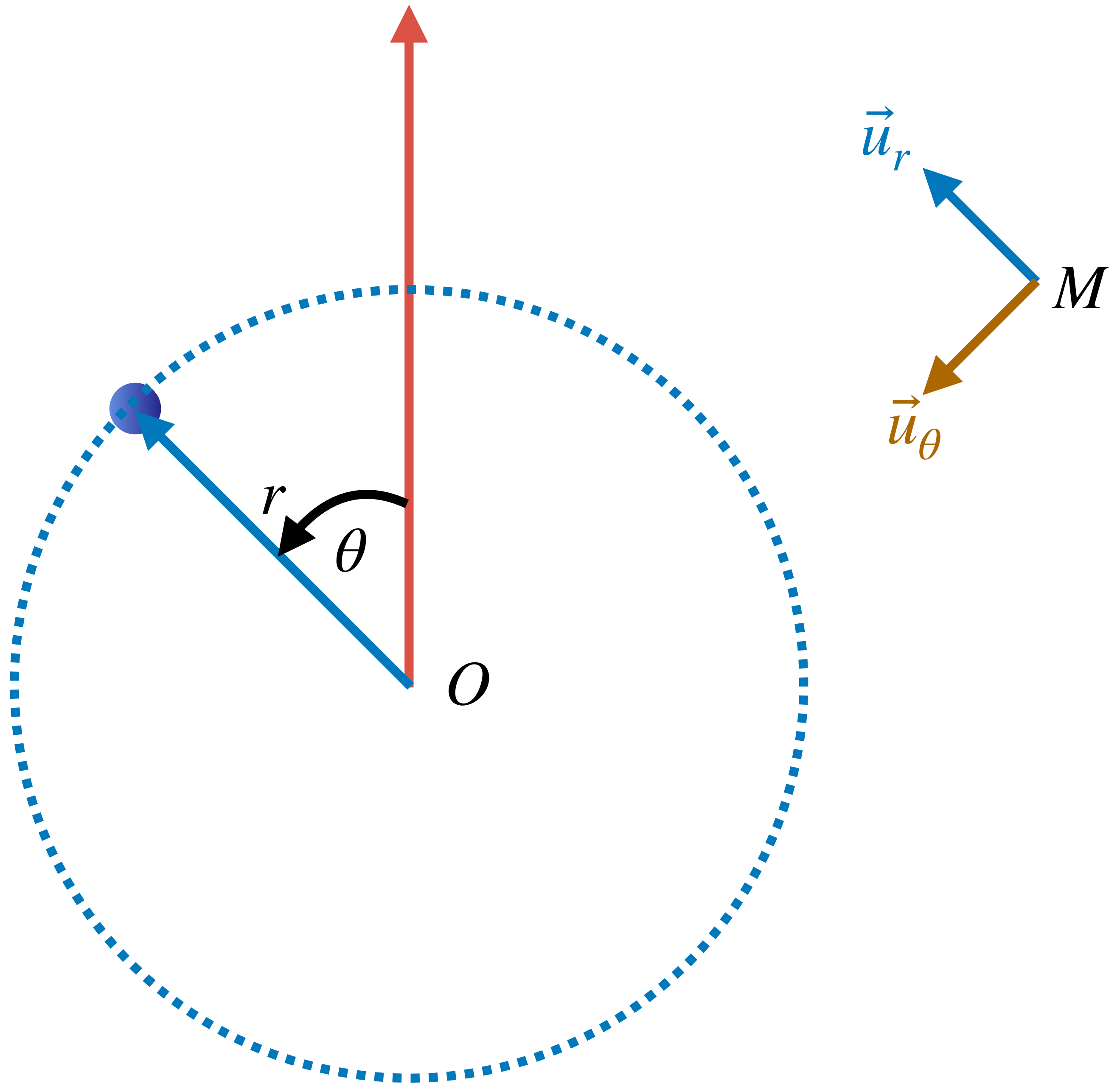
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



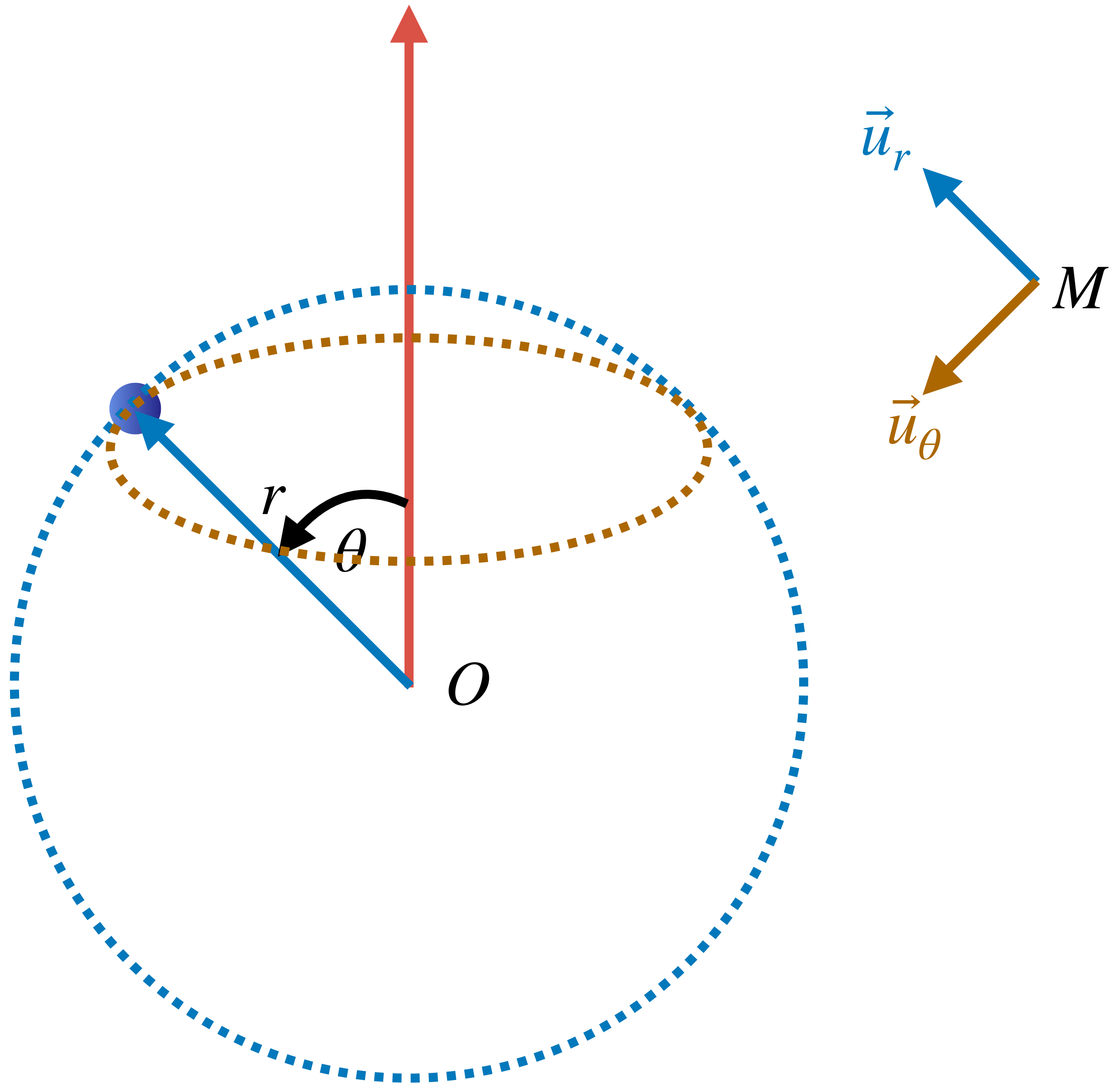
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



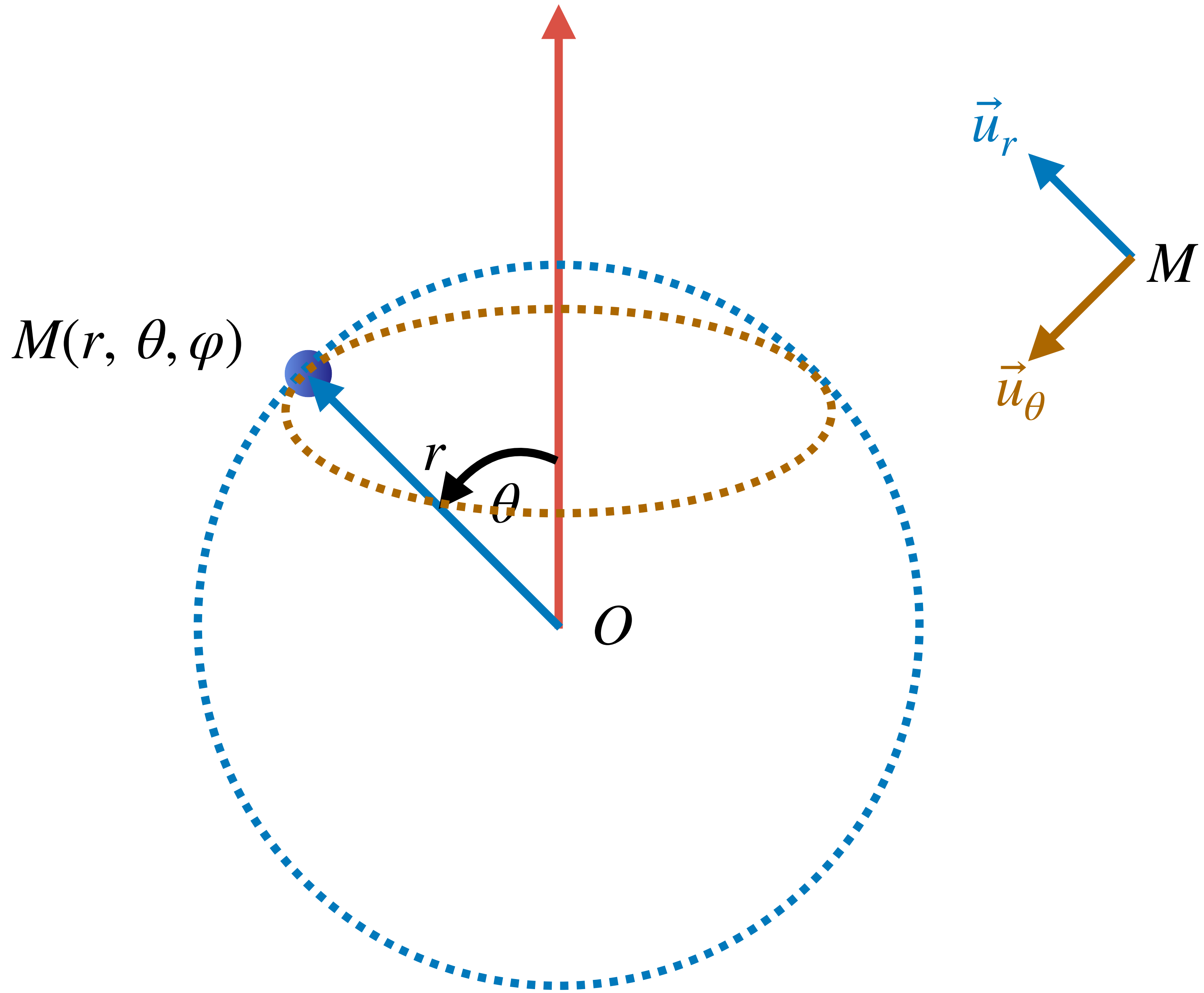
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



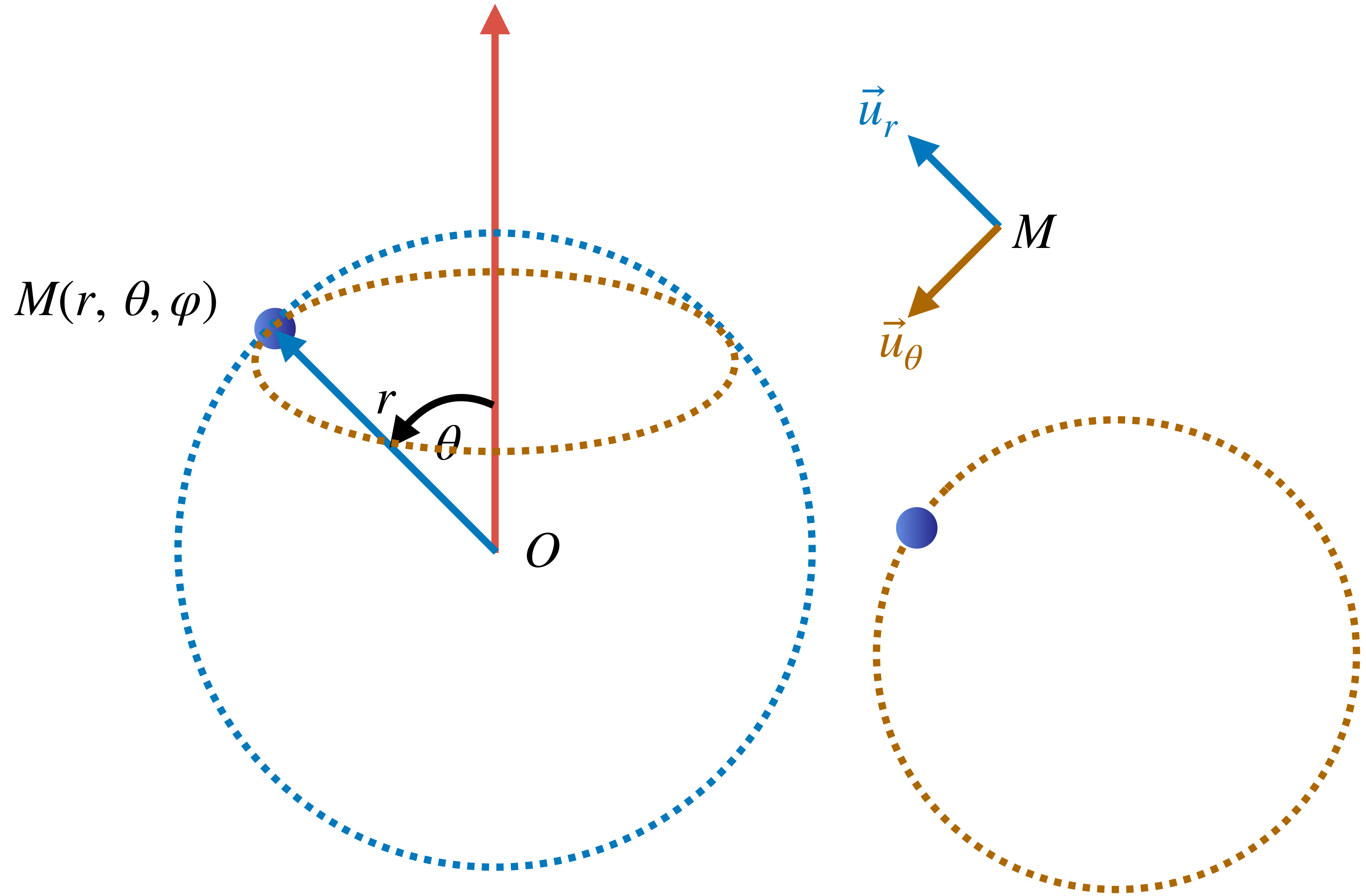
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



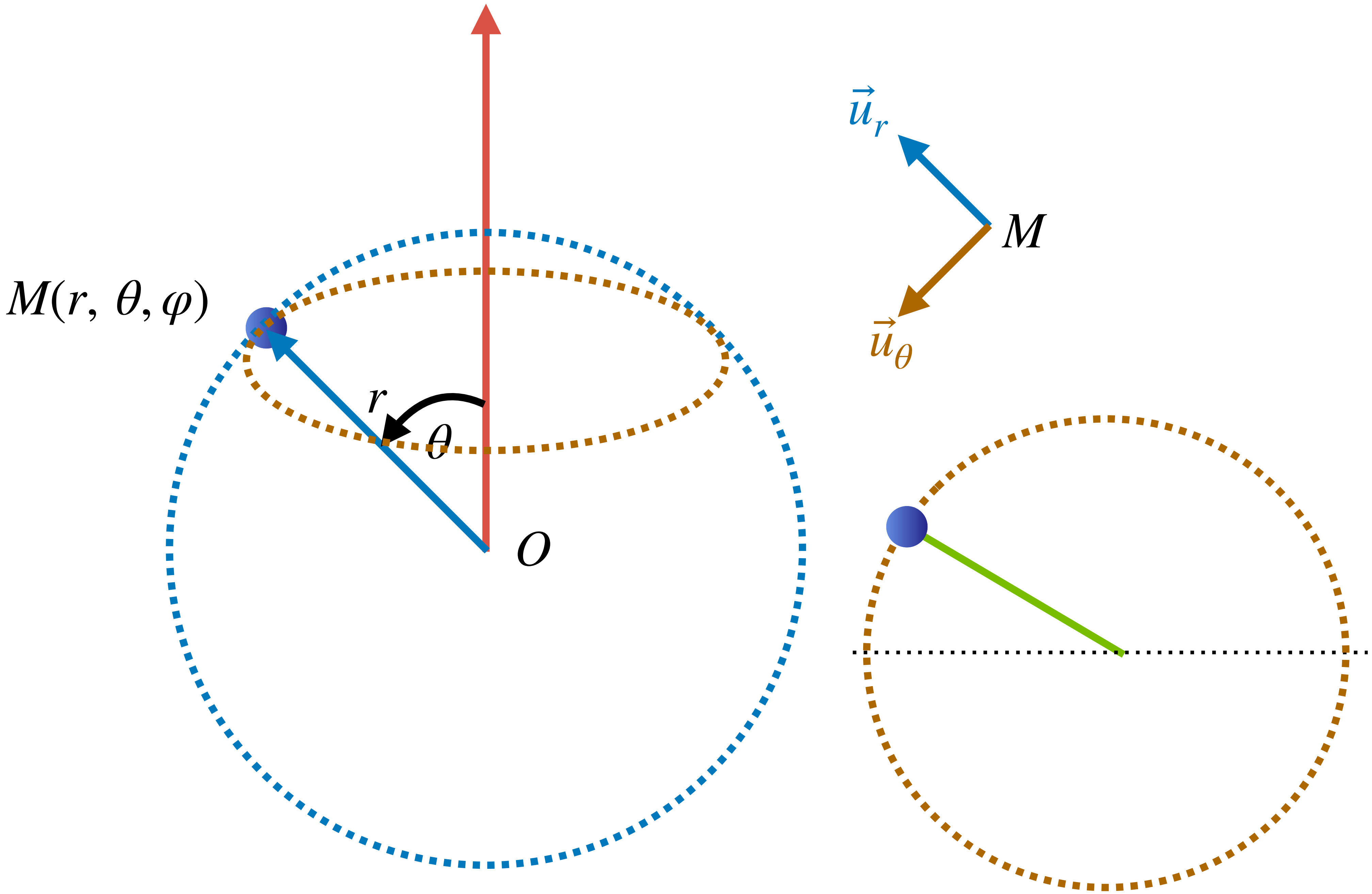
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



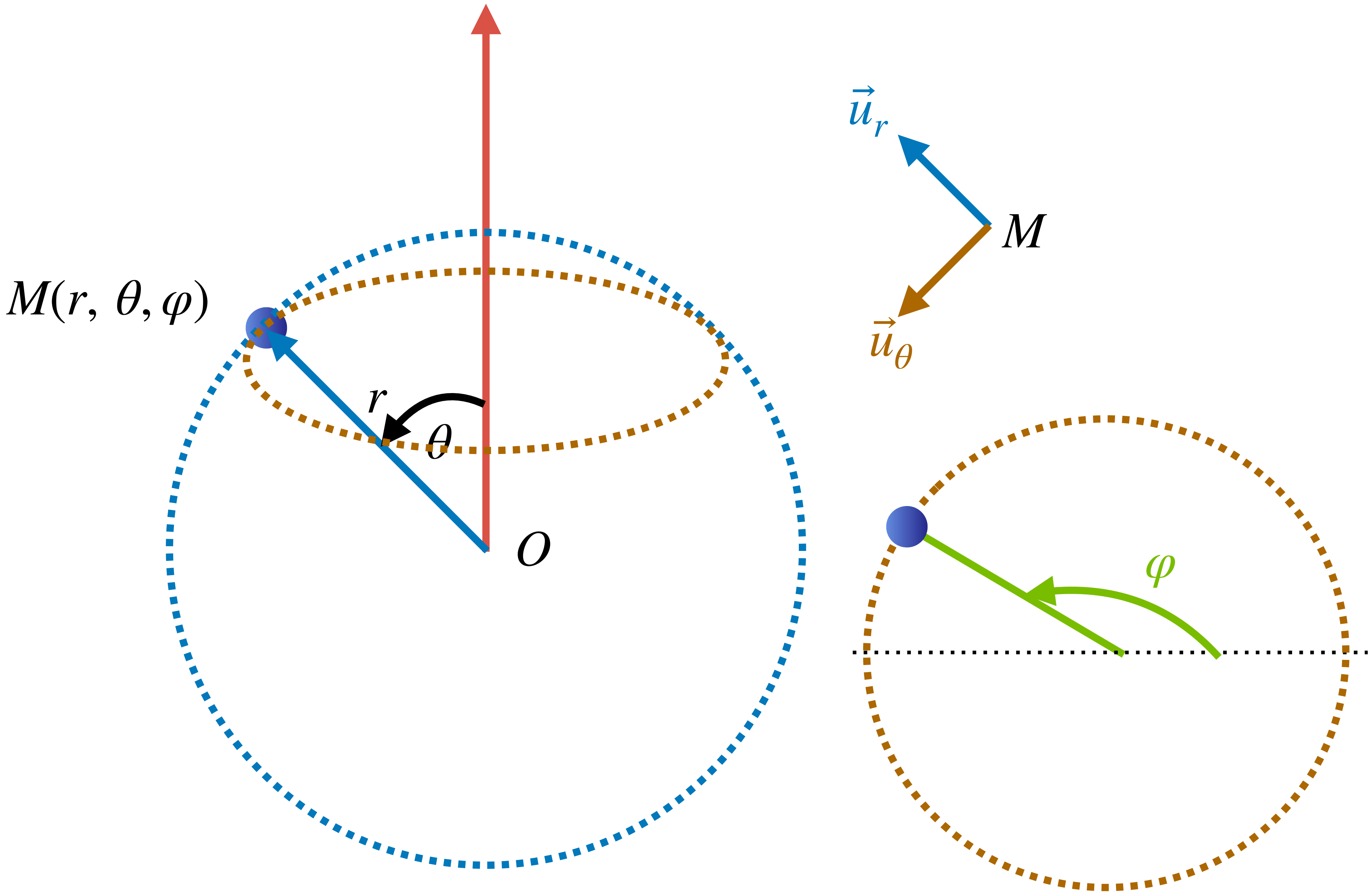
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



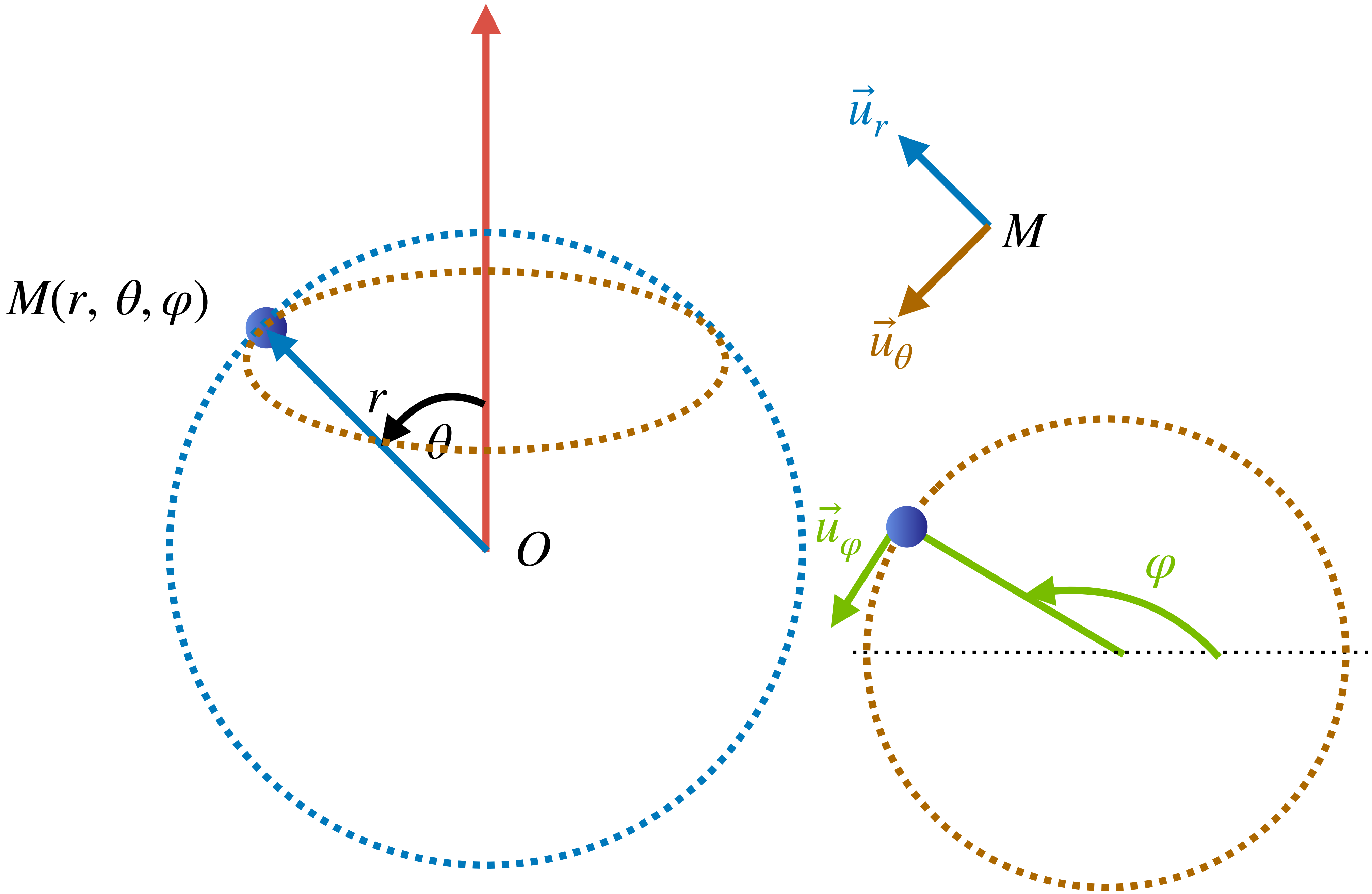
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



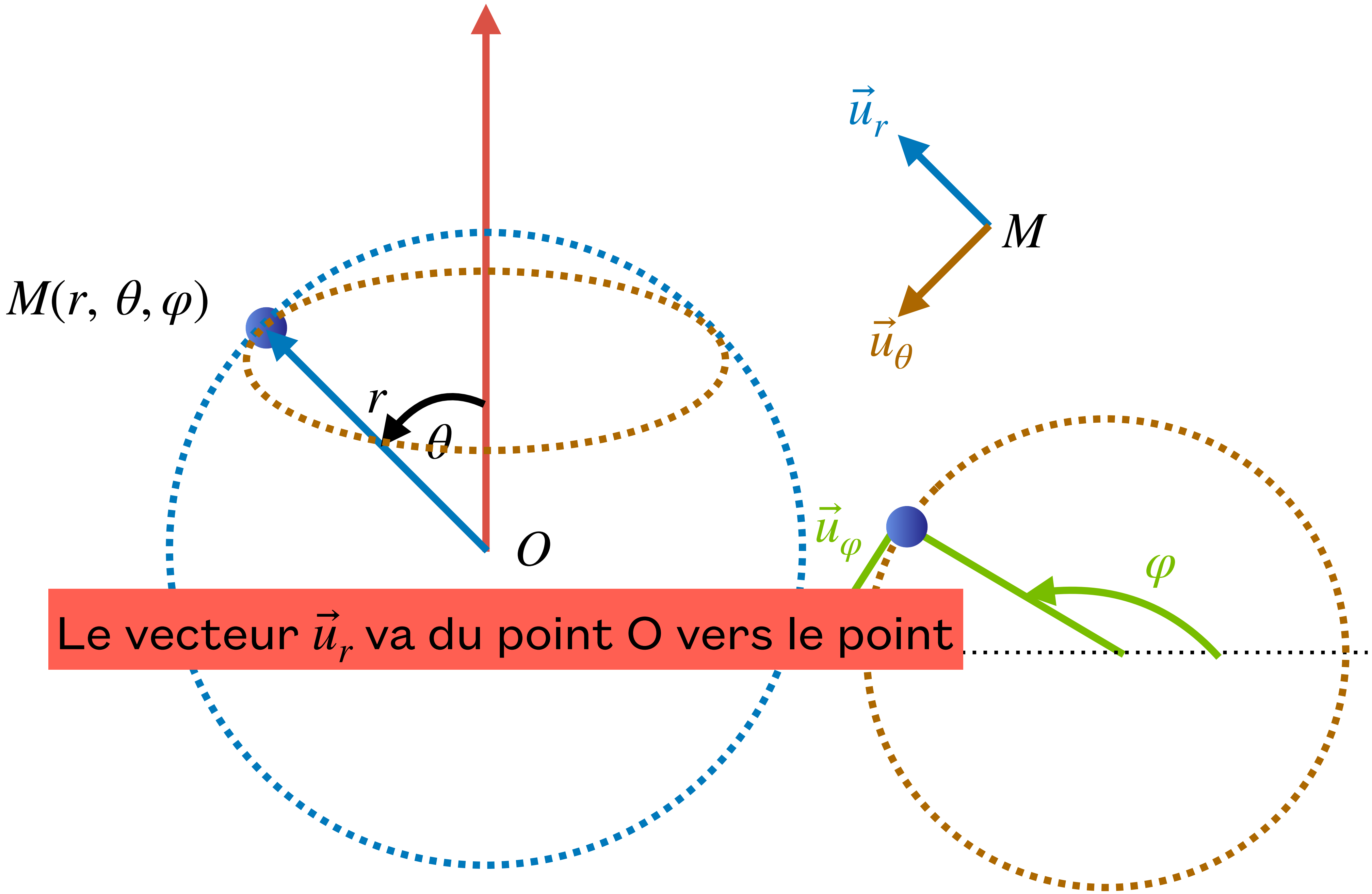
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

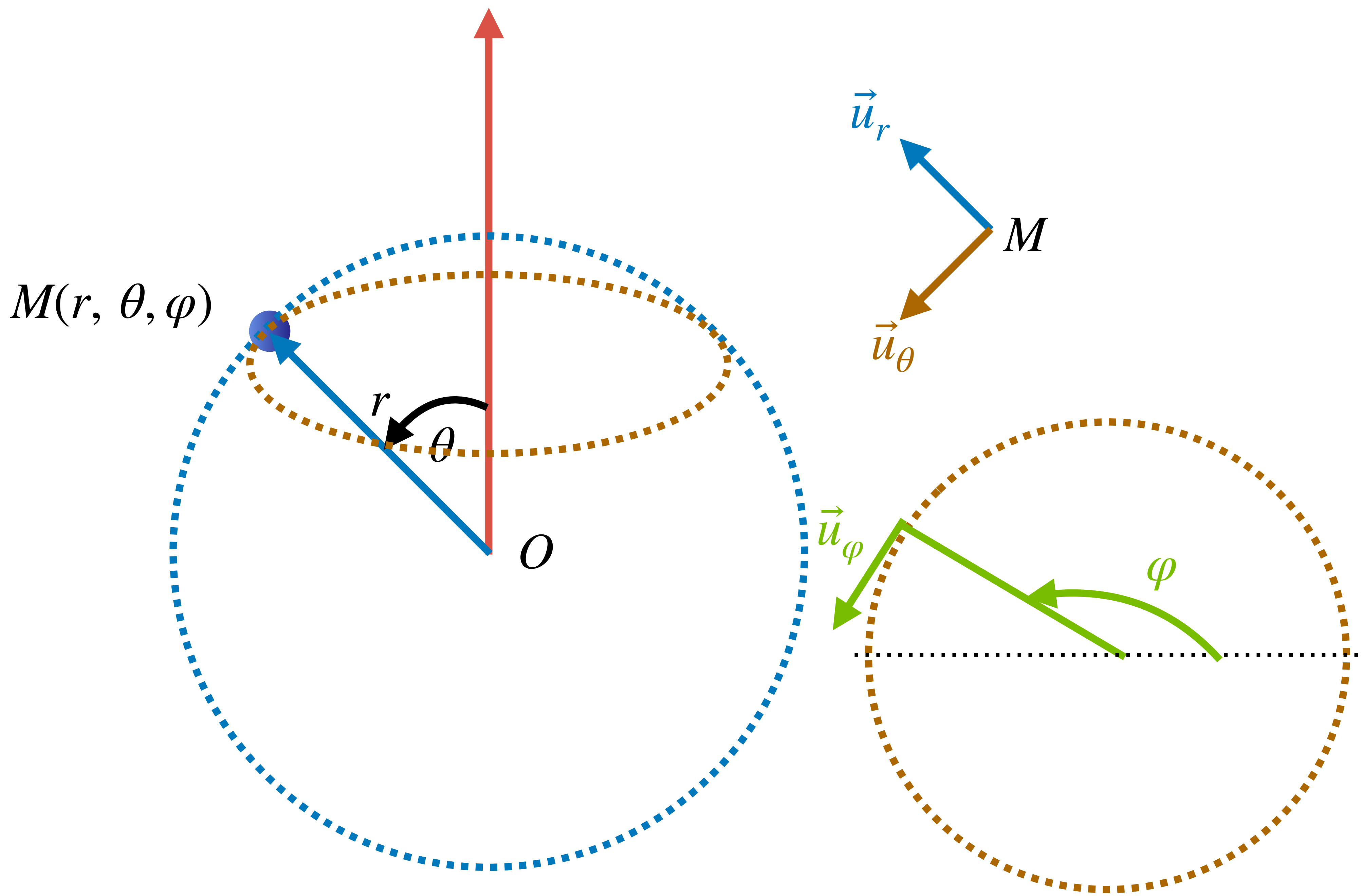
Parenthèse : les systèmes de coordonnées



Le vecteur $\vec{u}_r$ va du point O vers le point

COORDONNÉES SPHÉRIQUES

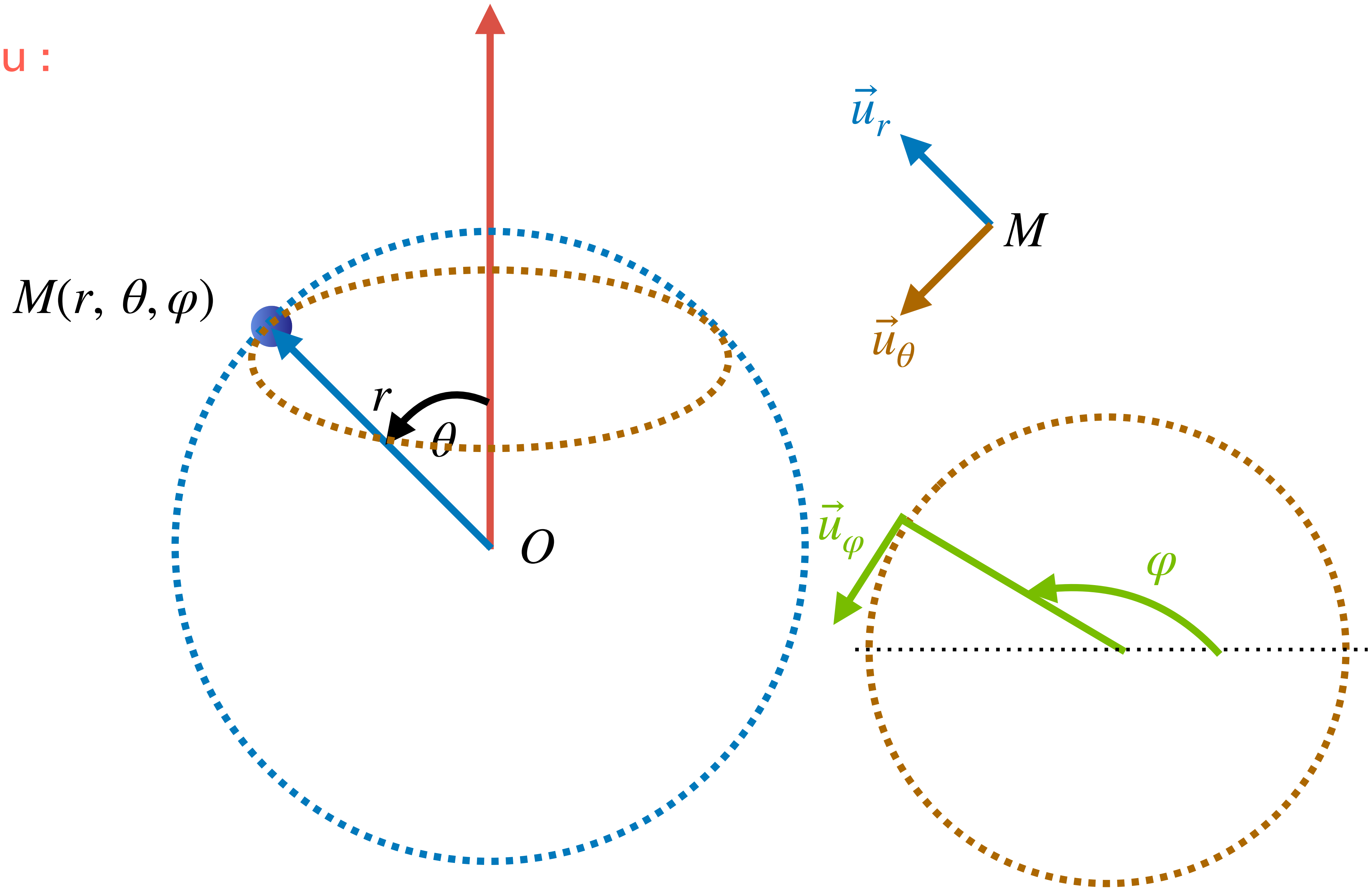
Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

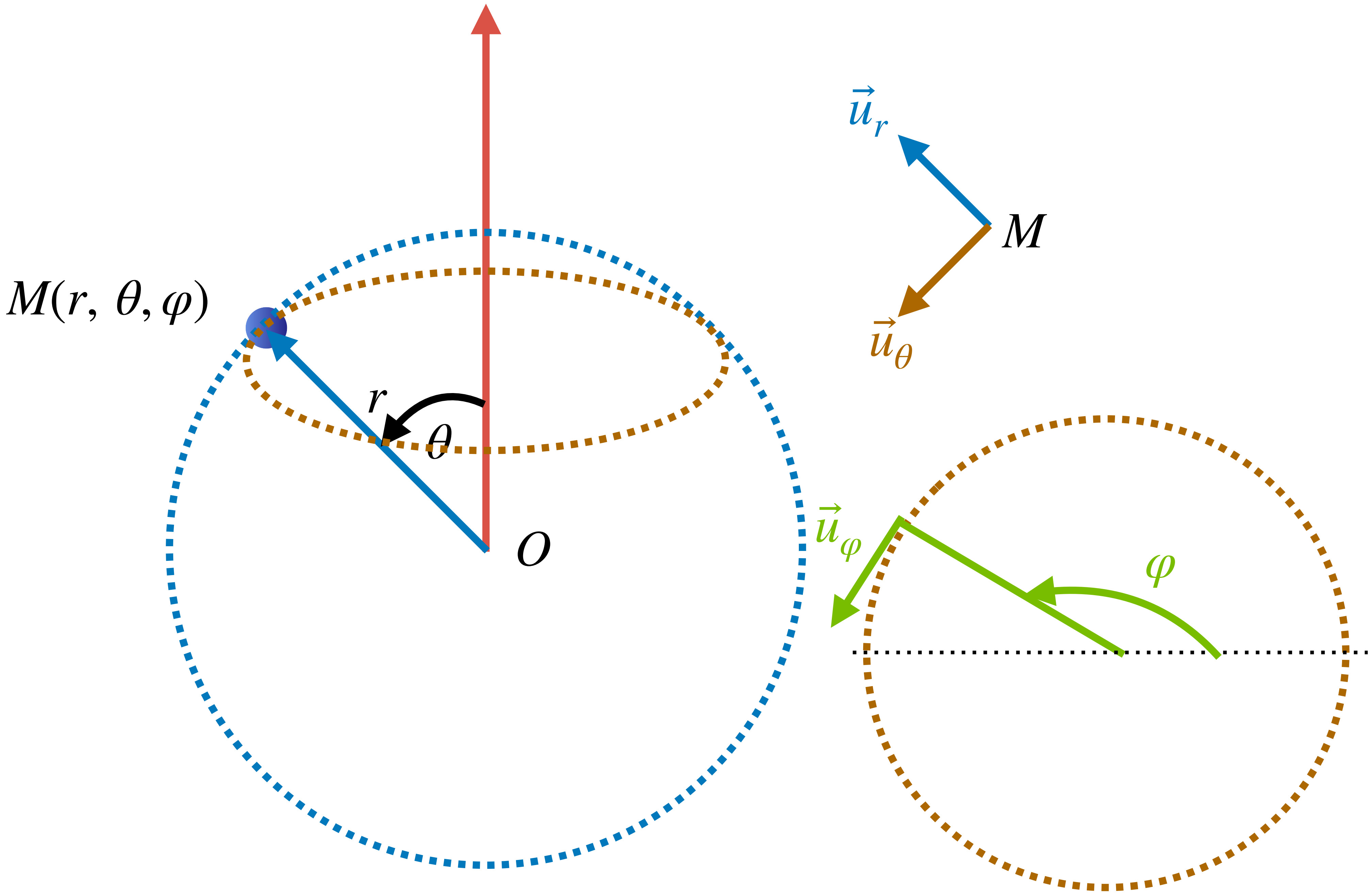
Parenthèse : les systèmes de coordonnées

Plan du tableau :
(M,$\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$)



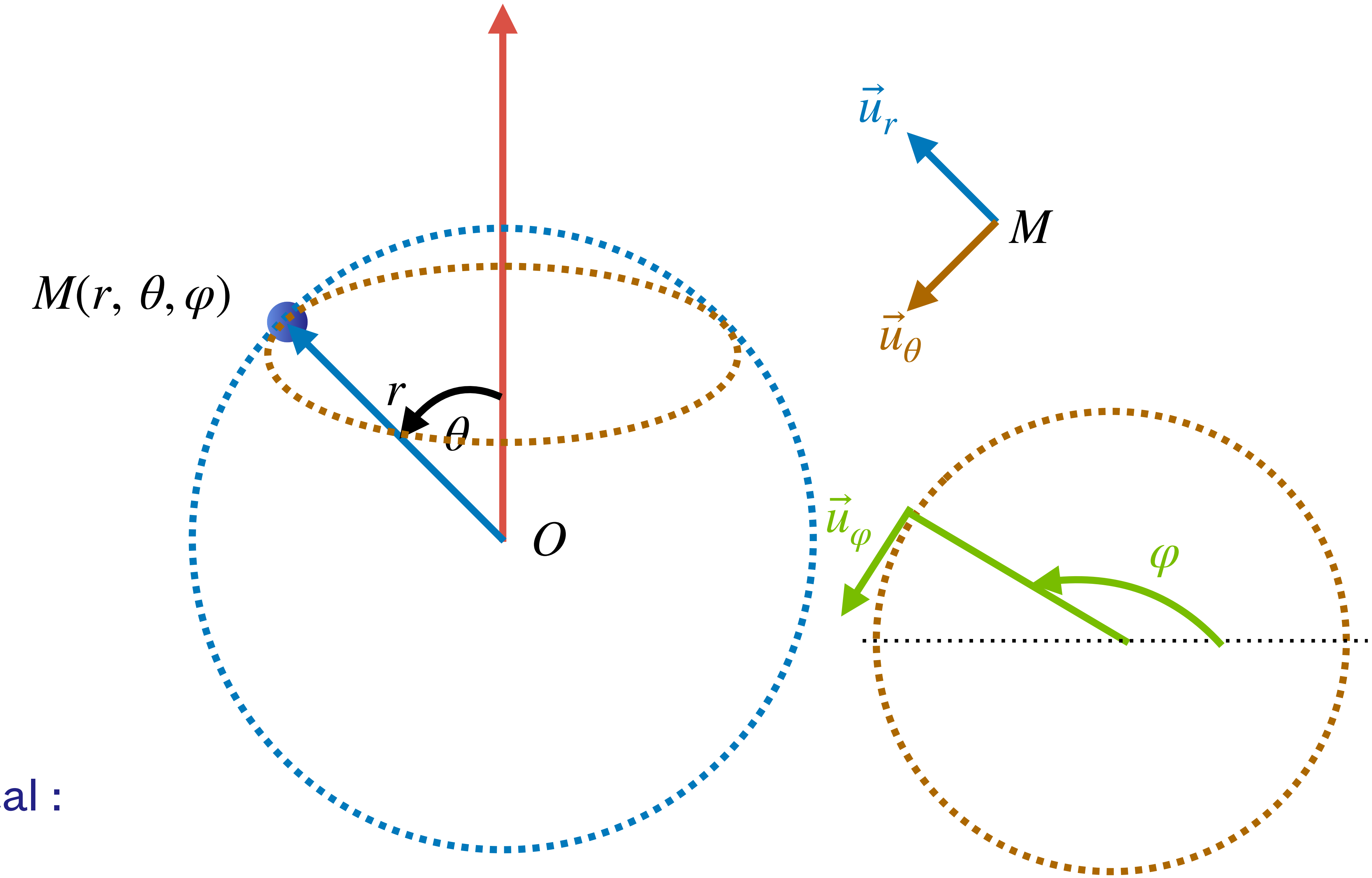
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

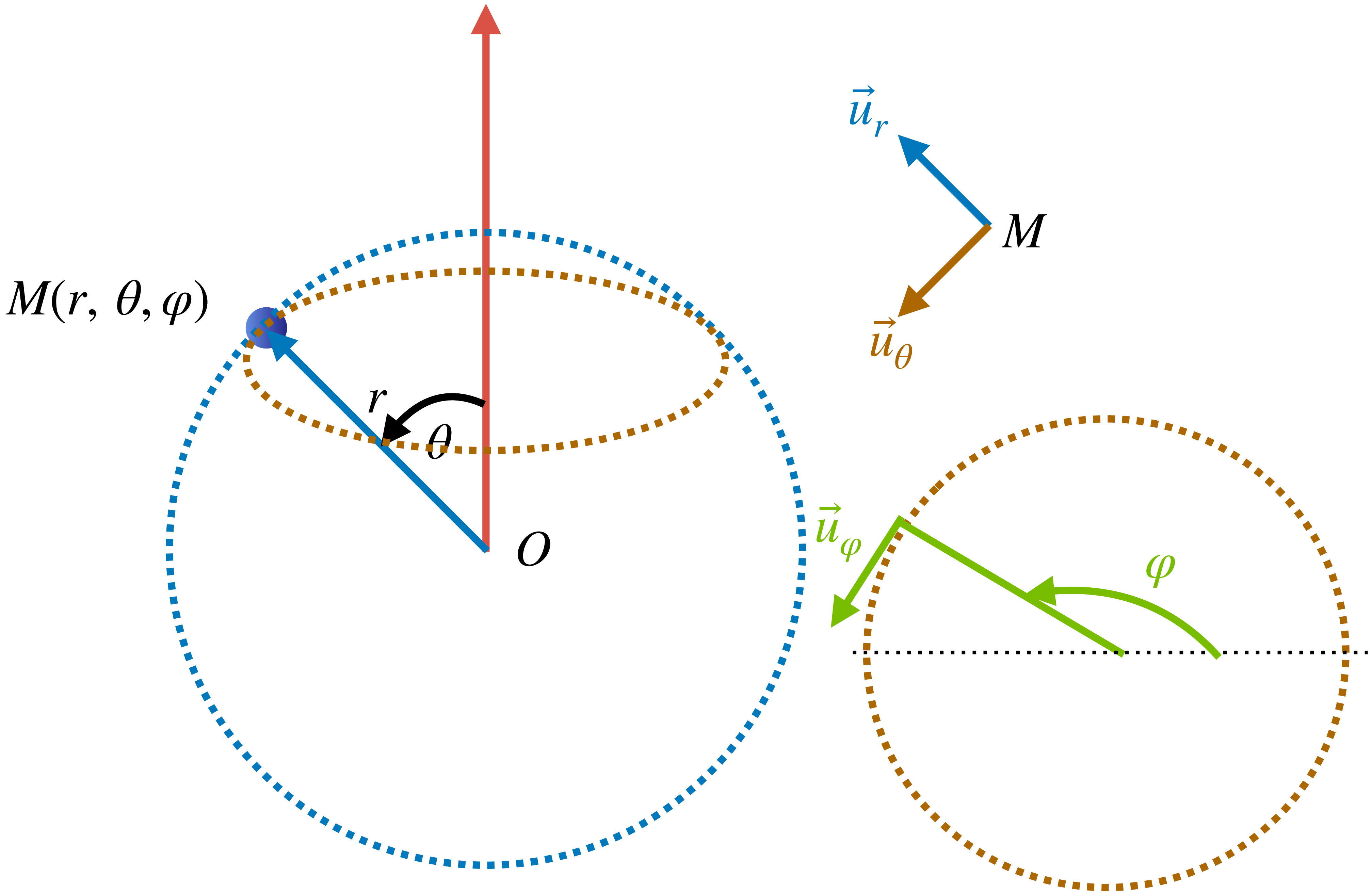
Parenthèse : les systèmes de coordonnées



Plan horizontal :
(M,$\vec{u}_r$,$\vec{u}_\varphi$)

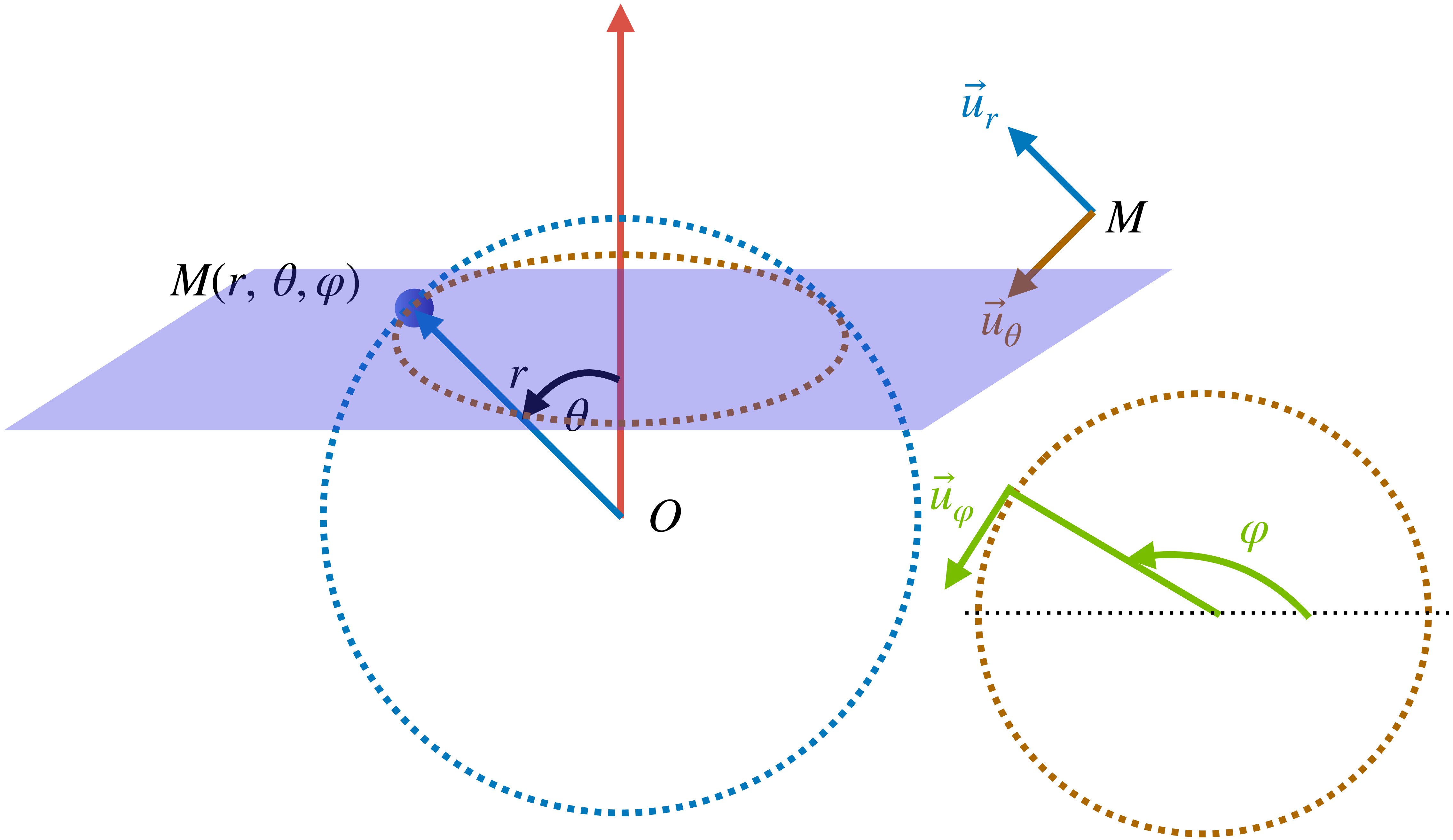
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



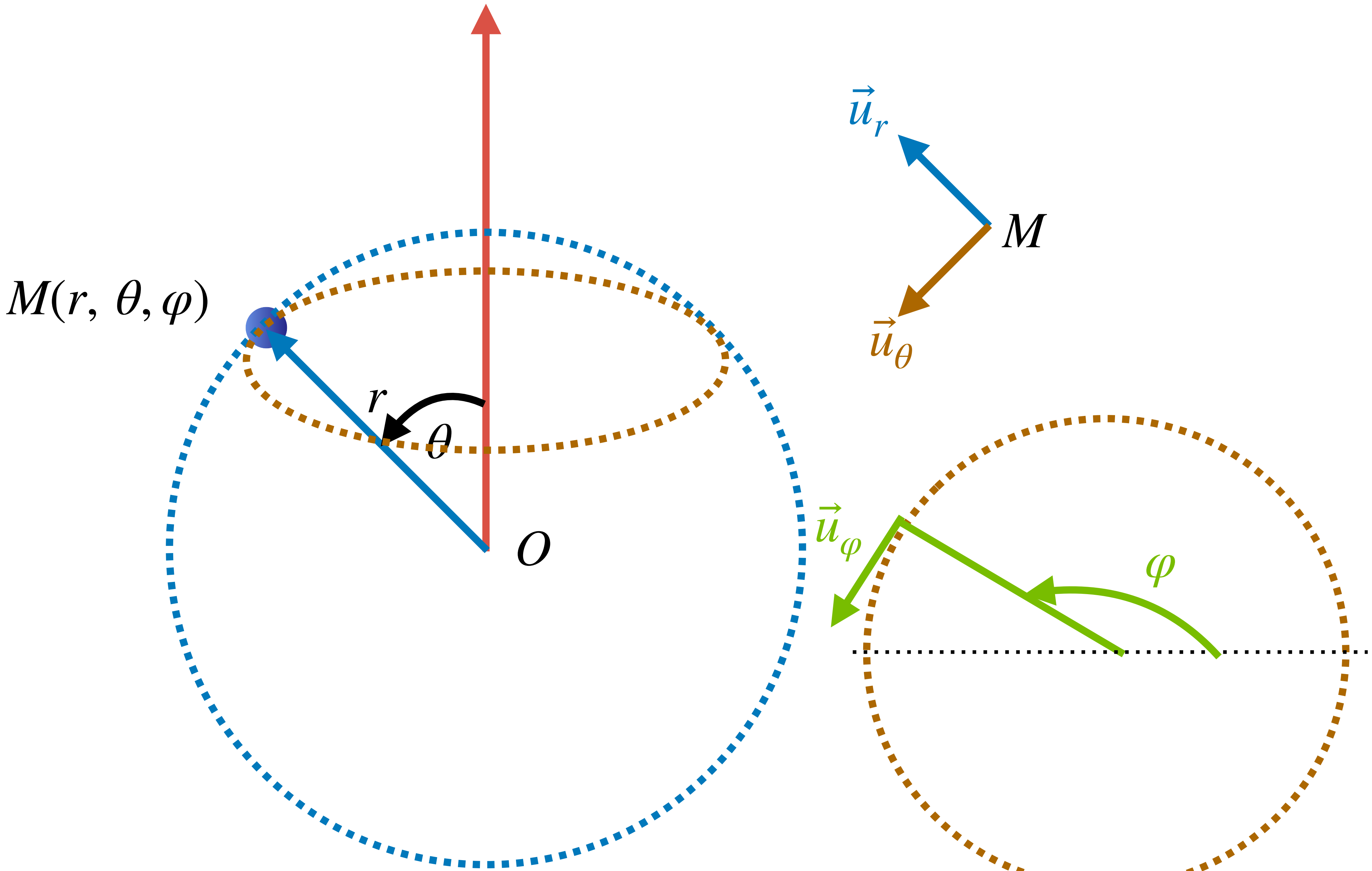
COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Parenthèse : les systèmes de coordonnées



COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Exercice 3

1. On considère une demi-sphère chargée en volume de manière homogène. Soit un point M situé à la verticale de la demi-sphère, sur son axe de symétrie. Déterminer la direction du champ $\overrightarrow{E}$

2. On rajoute au système précédent une deuxième demi-sphère, complétant la première, mais de charge opposée. La réponse précédente change-t-elle ?

3. On considère un point N situé sur le plan équatorial des deux demi-sphères. Déterminer la direction du champ en ce point.

Exercice 4

1. On considère un cylindre infini de section s, uniformément chargé. Soit un point M situé à l'extérieur du cylindre. Déterminer la direction du champ électrique.

2. Même question pour un point situé sur l'axe du cylindre.

Invariances du champ E

- On considère une distribution de charge : si l'on peut transformer cette distribution par une translation ou une rotation suivant l'une des coordonnées du repère choisi (x, y, z, r, θ ou φ) sans changer l'emplacement des charges, alors on dit que la **distribution est invariante suivant cette coordonnée.**

- Par exemple, une **sphère est invariante par rotation** suivant les angles φ et θ.

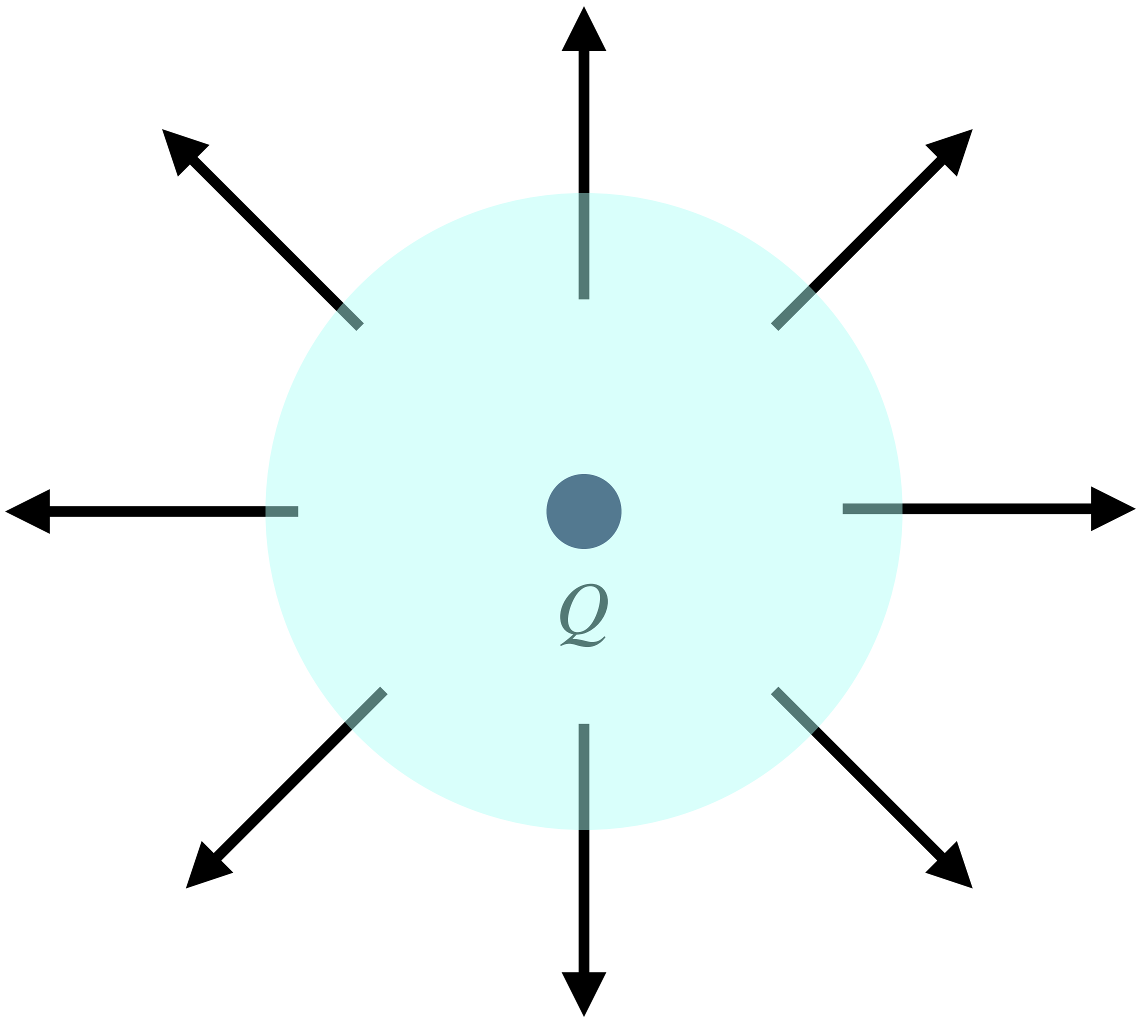
- Un plan (xOy) infini est **invariant par translation** suivant les directions x et y.

Invariances du champ E

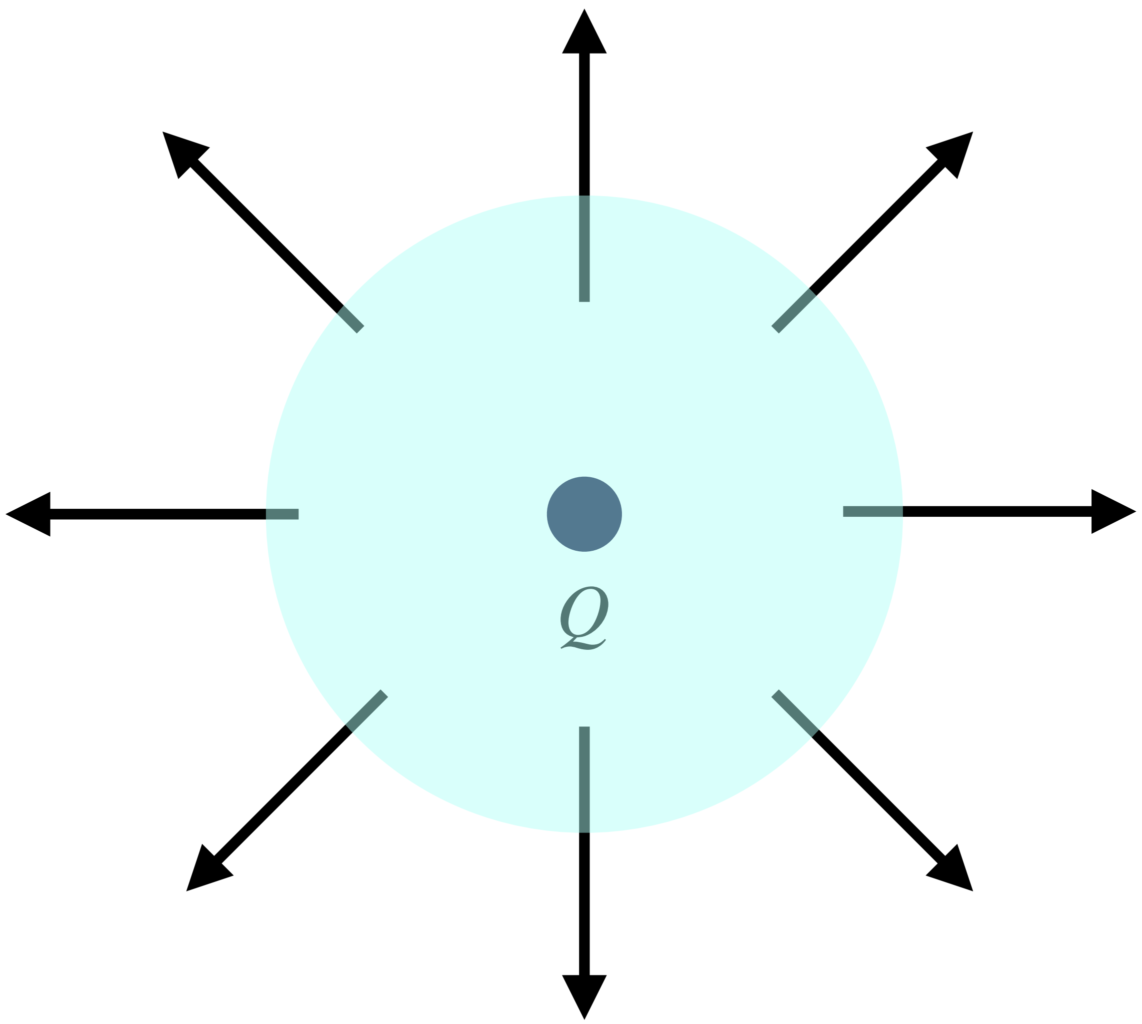
- Si la distribution de charge est invariante suivant une coordonnée X quelconque, alors le champ $\overrightarrow{E}$ ne peut pas dépendre de cette coordonnée !
- Pour une sphère, $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de la coordonnée radiale r. On peut donc écrire : $\overrightarrow{E} = E(r)\vec{u}_r$
- Combiner l'étude des invariances et des symétries du champ permet de déterminer en un point donné la direction et la dépendance du champ aux différentes coordonnées, sans aucun calcul !
- Cela facilitera les calculs suivants !

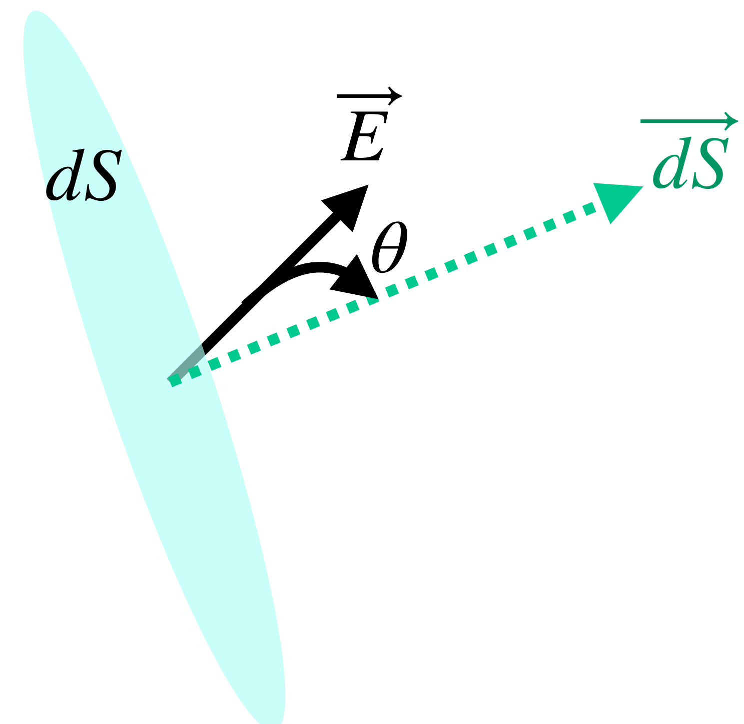
Le théorème de Gauss

Le flux du champ électrique



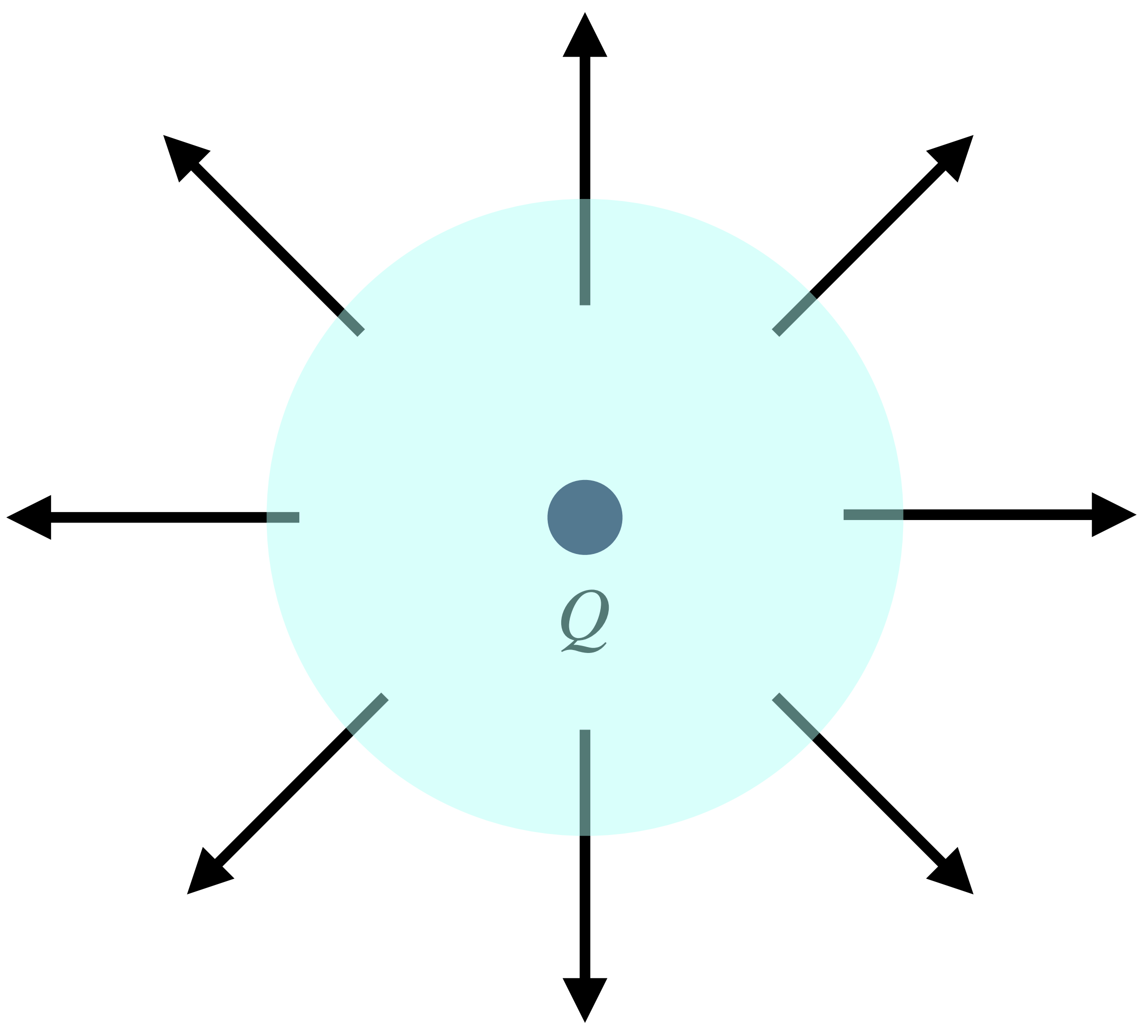
Le flux du champ électrique



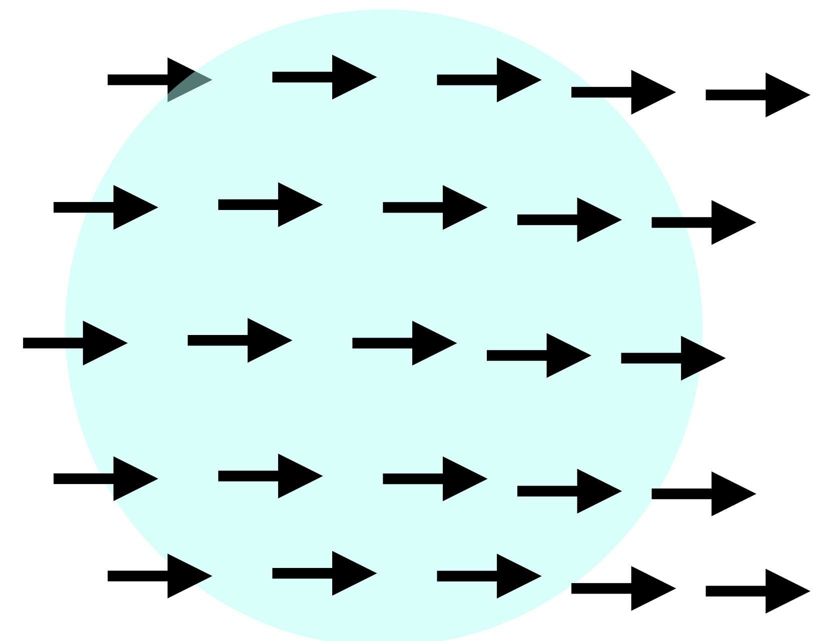


$$d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = EdS\cos\theta$$

Le flux du champ électrique



Le champ globalement a un flux positif

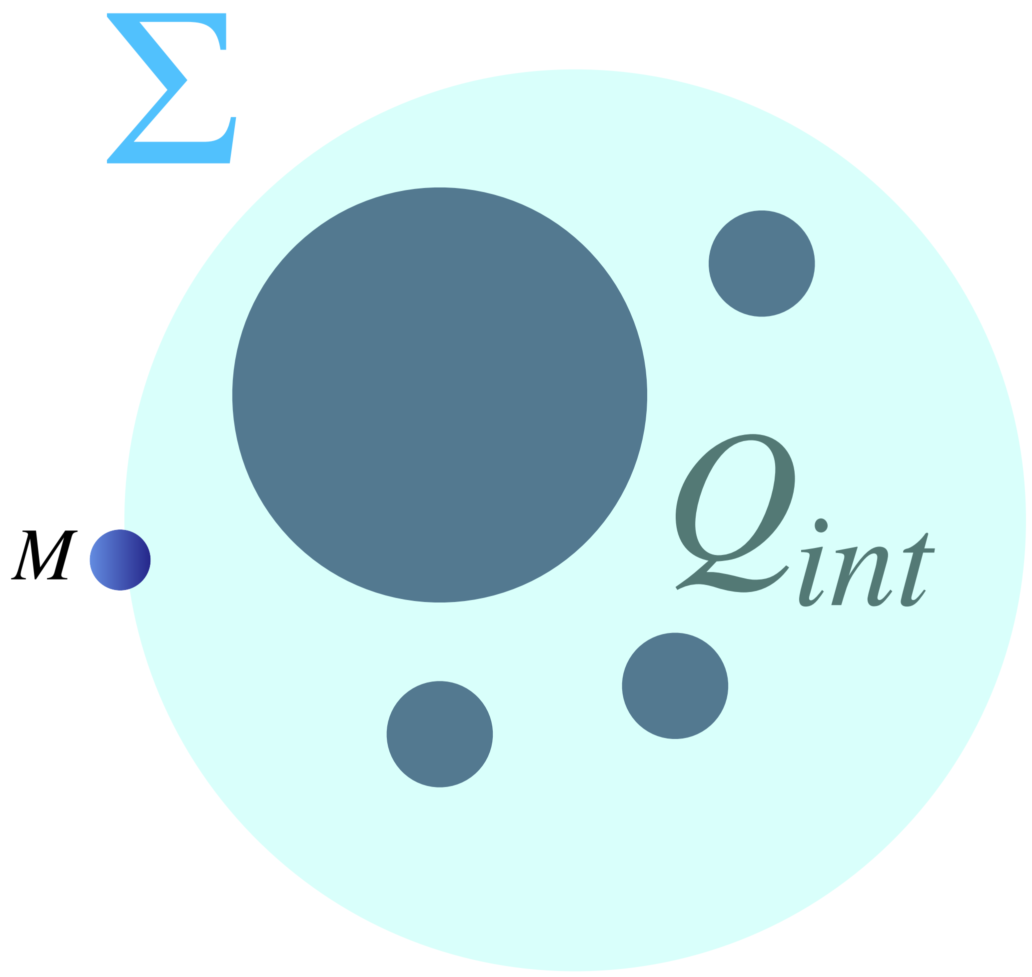


Le champ globalement a un flux nul

Le théorème de Gauss

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} d\Phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Le champ globalement a un flux positif



$M(R)$

Utilisation du théorème

Calcul du champ en M à l'extérieur d'une boule uniformément chargée

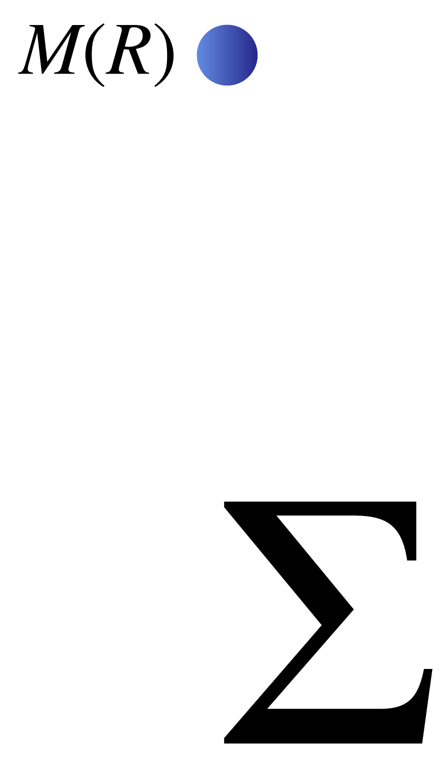
- Etude des symétries : symétrie par le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ (tableau) et le plan $(M, \vec{e}_r, \overrightarrow{u_\varphi})$ (plan orthogonal au tableau) : le champ est dirigé suivant $\vec{u}_r$.

- Invariances : par rotation suivant θ et φ : E(r).

- $\overrightarrow{E} = E(r)\vec{u}_r$

Utilisation du théorème

Calcul du champ en M à l’extérieur d’une boule uniformément chargée



- On choisit une surface de Gauss
  - qui passe par M
  - ne dépend que de r
  - est orthogonale à $\vec{u}_r$ en M.
- En gros, de même symétrie que la distribution de charges.
- Ici, une sphère de rayon R centrée sur O.
- Le calcul de l’intégrale alors se simplifie.

Calcul de l'intégrale

- $\Phi(\overrightarrow{E}) = \oiint_\Sigma \overrightarrow{E}(r) \cdot \overrightarrow{dS}$
- $\Phi(E) = \oiint_\Sigma E(r)dS$ car les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires.
- $\Phi(\overrightarrow{E}) = E(r)\oiint_\Sigma dS$ car r est une constante sur la surface, donc E(r) est une constante, et peut donc sortir de l'intégrale !
- $\Phi(\overrightarrow{E} = E(r) \cdot 4\pi R^2$

Application du théorème

- $\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(r) \cdot \overrightarrow{dS} = Q_{int}/\varepsilon_0$ Théorème de Gauss
- $E(R) \cdot 4\pi R^2 = Q/\varepsilon_0$
- $E(R) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$
- $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_r$ AH AH AH!!!
- Q peut se calculer à l'aide de la densité volumique de charge.

Exercice 5

- Reprendre le même calcul du champ, pour un point M situé à l'intérieur d'une boule uniformément chargée de densité volumique de charge ρ, et de rayon R_0 :
  - Calculer le flux du champ à travers une sphère de rayon $R < R_0$
  - Calculer Q_{int} la charge contenue dans la sphère de volume R
  - Utiliser le théorème de Gauss et conclure que l'on a :
    $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{3\rho}{\varepsilon_0} R \vec{u}_r$

Exercice 6

On considère cette fois un fil infiniment long, de densité linéique de charge λ, et un point M à l'extérieur du fil.

1. Montrer que le champ au point M est dirigé suivant $\vec{u}_r$ en coordonnées cylindriques, et qu'il ne dépend que de la distance r entre le point et le fil.

2. Quelle surface de Gauss semble la plus judicieuse :

   A. Une sphère centrée un point du fil.

   B. Un cube centrée sur le fil.

   C. Un cylindre centré sur le fil.

Exercice 6

3. Déterminer le flux du champ à travers le cylindre, que l'on prendra de rayon r et de hauteur (arbitraire) h, en scindant l'intégrale en trois parties : sur la base, sur le sommet, sur le côté. Montrer en particulier que le flux est nul au sommet et à la base du cylindre.

4. Calculer la charge intérieure à ce cylindre, en fonction de λ et h.

5. Montrer alors que l'on a :
$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$