Electrostatique, exercices

Exercice 1 : Modélisations d'un câble infini ●❍❍

On s'intéresse aux spécificités des différentes modélisations d'un câble électrique uniformément chargé. On va tout d'abord étudier la modélisation linéique d'un tel câble. On étudie donc un câble unidimensionnel infini, portant une densité de charge linéique $\lambda > 0$ uniformément répartie sur toute sa longueur. On cherche à déterminer le champ $\vec{E}$ en un point M situé à l'extérieur du fil.

1. Quel type de système de coordonnées doit-on utiliser ici : cartésien, cylindrique, ou sphérique ?
2. Dans le système choisi, étudier les symétries du système et montrer que le champ $\vec{E}$ est radial à l'extérieur du fil (c'est-à-dire toujours orthogonal au fil , et aligné en direction de ce dernier, comme les rayons d'une roue).
3. Par étude des invariances du système, montrer que le le champ $\vec{E}$ ne dépend que de la distance entre le point M étudié et le fil.
4. Pour utiliser le théorème de Gauss, on va choisir comme surface un cylindre centré sur le fil, de rayon r tel que le point M soit situé sur le côté du cylindre, et de hauteur h quelconque. Montrer que le flux du champ électrique est nul sur le haut et le bas du cylindre.
5. Ecrire puis simplifier le théorème de Gauss en utilisant le résultat de la question précédente. En déduire l'expression du champ recherché.
6. Quel problème pose cette expression ?

Pour éviter la divergence constatée à la question précédente, on va modéliser en volume le câble, et le représenter désormais comme un cylindre de hauteur infini et de rayon R_0, chargé uniformément en volume.

7. Donner l'expression de ρ, densité volumique du câble, en fonction de λ. On supposera qu'une longueur L de câble porte la même charge totale Q dans les deux modèles.
8. Expliquer pourquoi le champ à l'extérieur du câble s'exprime de la même façon dans les deux modèles.
9. On cherche à calculer l'expression du champ électrique en un point $M(r)$ situé à l'intérieur du câble. En choisissant comme surface de Gauss un cylindre de rayon $r < R_0$ s'appuyant sur M, et de hauteur h, déterminer cette expression par application du théorème de Gauss.
10. Vérifier qu'en $r = R_0$ le champ électrique est continu.

Exercice 2 : Champ électrique entre deux plans infinis ●●❍

Dans cet exercice on repère les points de l'espace à l'aide d'un repère cartésien (O, x, y, z). On considère un plan (xOy) infini, uniformément chargé, de densité surfacique de charge σ. On cherche à calculer le champ $\vec{E}$ en un point M situé à une altitude $z > 0$ par rapport à ce plan.

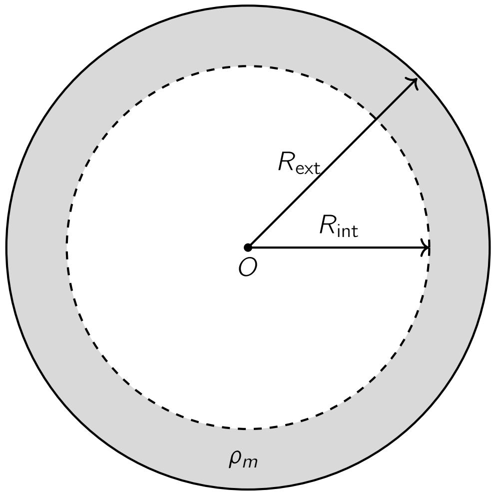
1. En étudiant les symétries et les invariances de cette distribution de charges, montrer que le champ électrique est de la forme $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$.
2. Pour utiliser le théorème de Gauss, on choisit comme surface un cube de longueur d'arête $a = 2z$, dont le côté supérieur s'appuie sur M, placé de telle façon que le plan chargé coupe ce cube en son milieu. Justifier rapidement que le flux du champ électrique est nul sur les faces latérales du cube.
3. Justifier également que ce champ est non nul sur les faces supérieures et inférieures, et qu'il a par ailleurs la même norme sur ces deux faces.
4. Montrer alors que $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$. Que remarque-t-on ?

On place un deuxième plan infini, parallèle au premier, à la coordonnée $z = h$, $h > 0$. Ce plan est uniformément chargé de densité de charge surfacique $-\sigma$.

5. Déterminer la valeur du champ électrique généré par ce deuxième plan uniquement, en un point d'altitude $z < h$.
6. Montrer alors que le champ entre les deux plans chargés vaut : $\vec{E}(z) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

Exercice 3 : Intrigante Terre creuse ●●●

Dans cet exercice on se propose d'établir quelques conséquences surprenantes du modèle de la Terre creuse. On suppose dans cet exercice que la Terre est une boule de centre O de rayon R_{ext}, de densité volumique ρ_m, à l'intérieur de laquelle se trouve une sphère complètement vide de centre O et de rayon $R_{int} < R_{ext}$.



Pour étudier ce problème, nous introduisons le champ gravitationnel $\vec{g}$ généré par les distributions de masse. Ce champ possède les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrique $\vec{E}$ en électrostatique. Par analogie, on peut utiliser le théorème de Gauss en gravitation pour le calculer :

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}},$$

où M_{int} est la masse contenue à l'intérieur de la surface de Gauss Σ, et G est la constante gravitationnelle universelle :

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2.$$

.

1. Par étude des symétries et des invariances du problème, montrer que le champ $\vec{g}$ est orienté radialement : $\vec{g}(M) = g(r)\vec{u}_r$ dans un système de coordonnées sphériques.
2. Quelle surface de Gauss est-il pertinent d'utiliser ici ?
3. Montrer que le champ $\vec{g}$ est nul dans la cavité terrestre. Conséquence ?
4. Calculer l'expression du champ $\vec{g}$ en un point de la surface terrestre.
5. Sachant que $g = 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$, et que $R_{ext} = 6400\,\text{km}$, déterminer la masse totale de la Terre.
6. Déterminer le volume total de la "croûte" terrestre. On donnera pour l'application numérique $R_{int} = 6300\,\text{km}$.
7. En déduire ρ_m. Sachant qu'elle vaut $\rho_c = 3000\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ au niveau de la croûte terrestre en réalité, que faire comme commentaire ?
8. Si l'on suppose maintenant une densité $\rho_m = \rho_c$, déterminer la masse totale de la Terre. En déduire la valeur du nouveau champ de gravitation à la surface terrestre.