DS de physique n°2 - correction

Exercice 1 : Champ électrique créé par un câble électrique

(Q.1.1) Ce sont des Coulomb par mètre ($C.m^{-1}$).

(Q.1.2) Au vu de la géométrie du problème (système possédant une symétrie de rotation autour d'un axe), on utilisera un système de coordonnées cylindrique.

(Q.1.3) La distribution de charge est symétrique par rapport au plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ (plan vertical contenant M) et par rapport au plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ (plan horizontal contenant M), le champ $\vec{E}$ est donc dirigé suivant $\vec{u_r}$ le vecteur radial.

(Q.1.4) La distribution de charge est invariante par rotation. autour de l'axe du cylindre, ainsi le champ ne dépend pas de l'angle θ. Elle est de plus invariante par translation suivant l'axe du cylindre, ainsi le champ ne dépend pas de z. De fait le champ $\vec{E}$ ne dépend que de la distance entre le point M étudié et le fil, r.

(Q.1.5) Le théorème de Gauss s'énonce comme suit :

$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

avec σ une surface fermée, dite surface de Gauss, sur laquelle le flux du champ $\vec{E}$ est calculé, Q_{int} la charge comprise dans la surface Σ et ε_0 la permittivité du vide.

(Q.1.6) Le flux du champ électrique sur le haut et le bas du cylindre est nul car le champ est orthogonal au vecteur surface de ces portions du cylindre. Dit autrement le champ est orthogonal à ces surfaces.

(Q.1.7) En utilisant cette surface de Gauss, il vient :

$$\begin{aligned}
\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ (on intègre uniquement sur la surface latérale)} \\
&= \iint_{lat} E(r) dS \text{ } (\vec{E} \text{ est colinéaire au vecteur } d\vec{S} \text{ en tout de point de } \Sigma) \\
&= E(r) \iint_{lat} dS \text{ (sur cette surface } E(r) \text{ est constant).} \\
&= E(r) 2\pi r h
\end{aligned}$$

On a également que $Q_{int} = h\lambda$, soit en appliquant le théorème de Gauss :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(Q.1.8) On aurait $\lambda \simeq 1.67 \times 10^{-7}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$ après calcul.

(Q.1.9) L'expression diverge quand r tend vers 0.

(Q.1.10) Une même longueur L de câble porte la même charge totale Q dans les deux modèles, on a donc : $\rho \times \pi R_0^2 L = \lambda L$ d'où :

$$\rho = \frac{\lambda}{\pi R_0^2}$$

(Q.1.11) Le champ à l'extérieur du câble s'exprime de la même façon dans les deux modèles car pour une même surface de Gauss cylindrique, la charge intérieure à cette surface est la même dans les deux modèles, ce qui donne au champ la même valeur. On avait : $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ d'où :

$$E(r) = \frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon_0 r}$$

(Q.1.12) On exprime d'abord le flux du champ électrique. Le calcul est similaire au précédent :

$$\begin{aligned}
\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ (on intègre uniquement sur la surface latérale)} \\
&= \iint_{lat} E(r) dS \text{ } (\vec{E} \text{ est colinéaire au vecteur } d\vec{S} \text{ en tout de point de } \Sigma) \\
&= E(r) \iint_{lat} dS \text{ (sur cette surface } E(r) \text{ est constant).} \\
&= E(r) 2\pi r h
\end{aligned}$$

La charge intérieure à cette surface elle, dépend de r. On a dans le modèle volumique : $Q_{int} = \rho \times V$ avec V le volume de la surface de Gauss ici, $V = \pi r^2 h$. D'où après calculs :

$$E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

(Q.1.13) En $r = R_0$ le champ électrique vaut d'après l'expression précédente et celle de la question 11, $E(R_0) = \rho R_0 / 2\varepsilon_0$. Le champ calculé à l'extérieur et celui à l'intérieur du cylindre sont continus.

Exercice 2 : Modélisation d'un noyau atomique

(Q.2.1) La charge totale du noyau peut se calculer grâce à l'intégrale :

$$Q = \int_0^a 4\pi\rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr$$

On a alors :

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\rho_0 \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right) dr \\ &= 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{3}r^3 - \frac{r^5}{5a^2}\right]_0^a \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{a^3}{5}\right) \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{2}{15}a^3\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat : $Q = \dfrac{8}{15}\pi\rho_0 a^3$.

(Q.2.2) La distribution de charge est invariante par rotation autour du centre O, en coordonnées sphériques le champ électrique ne dépend donc ni de θ ni de ϕ. Par ailleurs tout plan passant par les points O et M est plan de symétrie de la distribution. Le champ électrique étant contenu dans chacun de ces plans, il est forcément radial. Le champ électrique s'exprime donc sous la forme : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

(Q.2.3) Nous allons appliquer le théorème de Gauss en utilisant comme surface de Gauss une sphère de rayon r s'appuyant sur M (point au niveau duquel on cherche à déterminer le champ électrique) et centrée sur O. Le flux du champ $\vec{E}$ s'exprime donc ainsi :

$$\begin{aligned} \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} &= \oiint_{lat} E(r)dS \text{ ($\vec{E}$ est colinéaire au vecteur $\vec{dS}$ en tout de point de Σ)} \\ &= E(r)\oiint_{lat} dS \text{ (sur cette surface $E(r)$ est constant).} \\ &= E(r)4\pi r^2 \end{aligned}$$

La charge intérieure a été calculée à la question précédente, il vient donc :

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{8}{15\varepsilon_0}\pi\rho_0 a^3$$

d'où :

$$E(r) = \frac{2}{15}\frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0 r^2}$$

(Q.2.4) Le calcul donne : $E_{surface} = 1.5 \times 10^{20}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.

(Q.2.5) Par application du théorème de Gauss, en utilisant une surface de Gauss de rayon $r < a$, on a :

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right)$$

d'où :

$$E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right)$$

Exercice 3 : Etonnante Terre plate !

(Q.3.1) La distribution de masse est invariante par translation suivant les directions horizontales, donc le champ de gravitation ne dépend que de l'altitude z. Par ailleurs tout plan vertical contenant M est plan de symétrie de la distribution, le champ de gravitation est donc vertical.

(Q.3.2) $g(z) = -g(-z)$ car le plan contenant la distribution de masse est de fait plan de symétrie de cette distribution. Suivant le principe de Curie, le champ $\vec{g}$ est donc également symétrique par rapport à ce plan, ce qui implique le résultat donné par l'énoncé.

(Q.3.3) En utilisant comme surface de Gauss un parallélépipède (ou pavé droit) centré sur le plan, dont les faces haute et basse ont pour coordonnées z et $-z$, le flux du champ $\vec{g}$ est nul sur les surfaces latérales du parallélépipède car le champ $\vec{g}$ est orthogonal à ces surfaces. Par ailleurs au niveau de la surface $+z$, on a :

$$\iint_{\Sigma+} \vec{g}\cdot\vec{dS} = \iint_{\Sigma+} g(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z = g(z)S$$

avec S l'aire de la surface. On remarque que le vecteur surface est orienté vers le haut. Pour la surface $z = -a$, on a :

$$\iint_{\Sigma-} \vec{g}\cdot\vec{dS} = \iint_{\Sigma-} g(-z)\vec{u}_z \cdot (-dS)\vec{u}_z = -g(-z)S = g(z)S$$

le vecteur surface est ici orienté vers le bas, ce qui compense le signe $-$ qui apparaît dans le calcul à cause de $g(-z)$. Ces deux flux sont donc identiques. Leur somme, le flux total, vaut donc $2g(z)S$.

(Q.3.4) Le théorème de Gauss gravitationnel permet d'écrire :

$$2g(z)S = -4\pi G M_{int} = -4\pi G S \sigma$$

d'où :

$$g(z) = -2\pi G \sigma$$

L'application numérique donne : $\sigma = 2.3 \times 10^{10}\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$. Dans ce modèle le champ de pesanteur ne varie pas avec l'altitude !

(Q.3.5) Pour une même surface S au sol, on doit contenir la même masse dans le modèle surfacique et le modèle volumique, on a donc :

$$\sigma S = \rho S H$$

d'où : $\rho = \sigma / H$, soit encore : $H = \sigma/\rho = 7.8 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$ soit 7800 km environ.