DS de physique n°2

Durée : 1h30

* L'usage de la calculatrice est autorisé, l'usage de documents autres que ceux du présent devoir est interdit.
* Le sujet comporte 2 pages numérotées. Le devoir se compose de 3 exercices indépendants.
* Vous veillerez à lire **l'intégralité** de l'énoncé avant de commencer la rédaction du devoir.
* Vous soignerez votre rédaction et votre présentation : en particulier, vous prendrez soin de **mettre en évidence vos résultats** et de paginer vos copies. Pensez à écrire vos nom et prénom sur chaque copie.
* **Une pénalité de 10% de la note finale sera appliquée sur toute copie dont les réponses seront insuffisamment rédigées ou mal présentées.**
* Tout commentaire physique pertinent est bienvenu et sera valorisé. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez dans votre copie et expliquerez les mesures que vous avez été amené à prendre.

Exercice 1 : Champ électrique créé par un câble électrique

On étudie dans cet exercice le champ électrique créé par un câble uniformément chargé. On va tout d'abord utiliser une modélisation linéique d'un tel câble. On considère un câble unidimensionnel infini, portant une densité de charge linéique $\lambda > 0$ uniformément répartie sur toute sa longueur. On cherche à déterminer le champ $\vec{E}$ en un point M situé à l'extérieur du câble.

(Q.1.1) Quelle est l'unité d'une charge linéique ?

(Q.1.2) Quel type de système de coordonnées doit-on utiliser ici : cartésien, cylindrique, ou sphérique ?

(Q.1.3) Dans le système choisi, étudier les symétries du système et montrer que le champ $\vec{E}$ est radial à l'extérieur du fil.

(Q.1.4) Par étude des invariances du système, montrer que le champ $\vec{E}$ ne dépend que de la distance entre le point M étudié et le fil.

(Q.1.5) Rappeler le théorème de Gauss : expliquer chaque terme, et les caractéristiques de la surface dite de Gauss.

(Q.1.6) On va choisir comme surface de Gauss un cylindre centré sur le fil, de rayon r tel que le point M soit situé sur le côté du cylindre, et de hauteur h quelconque. Que vaut le flux du champ électrique sur le haut et le bas du cylindre ?

(Q.1.7) Ecrire puis simplifier le théorème de Gauss en utilisant le résultat de la question précédente. En déduire l'expression du champ recherché.

(Q.1.8) Des arcs électriques peuvent apparaître si la norme du champ électrique dépasse une valeur $E_0 \sim 3 \times 10^6\,\mathrm{V\,m^{-1}}$. Calculer la valeur de λ nécessaire pour observer des arcs électriques à 1 mm du câble.

(Q.1.9) Quel problème pose l'expression du champ déterminée précédemment ?

Pour éviter la divergence constatée à la question précédente, on va modéliser en volume le câble, et le représenter désormais comme un cylindre de hauteur infini et de rayon R_0, chargé uniformément en volume.

(Q.1.10) Donner l'expression de ρ, densité volumique du câble, en fonction de λ. On supposera qu'une longueur L de câble porte la même charge totale Q dans les deux modèles.

(Q.1.11) Expliquer pourquoi le champ à l'extérieur du câble s'exprime de la même façon dans les deux modèles. Donner son expression en fonction de ρ et R_0.

(Q.1.12) On cherche à calculer l'expression du champ électrique en un point $M(r)$ situé à l'intérieur du câble. En choisissant comme surface de Gauss un cylindre de rayon $r < R_0$ s'appuyant sur M, et de hauteur h, déterminer cette expression par application du théorème de Gauss.

(Q.1.13) Vérifier qu'en $r = R_0$ le champ électrique est continu.

Exercice 2 : Modélisation d'un noyau atomique

Du point de vue du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon a. On désigne par $r = OP$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

(Q.2.1) La charge totale du noyau peut se calculer grâce à l'intégrale :

$$Q = \int_0^a 4\pi\rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr$$

Montrer alors que la charge totale Q du noyau vaut $Q = \frac{8}{15}\pi\rho_0 a^3$.

(Q.2.2) En étudiant les propriétés d'invariance et de symétrie de cette distribution de charge, montrer que le champ électrique s'exprime sous la forme : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial issu de O.

(Q.2.3) Montrer qu'en un point M à l'extérieur de la boule, on a :

$$E(M) = C\frac{\rho a^3}{\varepsilon_0 r^2}$$

avec C une constante dont on donnera la valeur.

(Q.2.4) Calculer la norme du champ électrique à la surface d'un noyau atomique. On prendra pour l'application numérique : $a = 10^{-15}$ m, $\rho_0 = 10^{25}$ C.m^{-3}, $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ SI. Si besoin, on pourra prendre $C \simeq 0,1$.

(Q.2.5) On cherche désormais à connaître le champ électrique à l'intérieur de la boule. L'intégrale de la question 1 permet de déterminer la charge comprise à l'intérieur d'une sphère de rayon $r < a$ (on ne démontrera pas ce résultat) :

$$Q(r) = 4\pi\rho_0 r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right)$$

En déduire le champ électrique en un point $M(r)$ intérieur à la boule.

Exercice 3 : Etonnante Terre plate !

On considère dans cet exercice que la Terre est plate, modélisée par un plan infini de densité surfacique de masse σ. On cherche à établir quelques conséquences surprenantes d'un tel modèle de Terre... On se placera dans un système de coordonnées cartésiennes, l'axe z étant pris orthogonal à la surface terrestre.

On donne, à toutes fins utiles, le théorème de Gauss gravitationnel :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$

avec $\vec{g}$ le champ de gravitation, Σ une surface fermée, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ SI la constante de gravitation universelle et M_{int} la masse intérieure à la surface Σ.

(Q.3.1) Montrer que le champ $\vec{g}$ est vertical, et ne dépend que de l'altitude z du point M au niveau duquel il est calculé.

(Q.3.2) Expliquer pourquoi $g(z) = -g(-z)$.

(Q.3.3) En utilisant comme surface de Gauss un parallélépipède (ou pavé droit) centré sur le plan, dont les faces haute et basse ont pour coordonnées z et $-z$, expliquer pourquoi le flux du champ $\vec{g}$ est nul sur les surfaces latérales du parallélépipède. Montrer également qu'il a la même valeur au niveau des surfaces hautes et basses.

(Q.3.4) En déduire alors la valeur du champ de gravitation pour $z > a$. Sachant qu'à la surface terrestre, on a $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, en déduire la valeur de σ. Quelle conséquence étonnante peut-on en tirer ?

(Q.3.5) Si l'on considère que la Terre plate possède une épaisseur H non-nulle, quelle devrait être sa valeur pour que la masse volumique de la Terre vaille en moyenne $\rho = 3000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$?