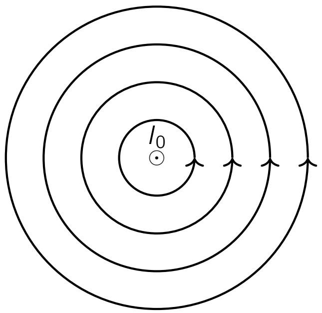
DS de physique n°3 - Corrigé

Exercice 1 : Champ magnétique créé par un câble électrique

(Q.1.1) Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ vertical contenant M est plan de symétrie des courants, donc d'antisymétrie de $\vec{B}$. Au niveau de M on a donc $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$, orthogonal à ce plan.

(Q.1.2) Le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz, donc B ne dépend pas de θ ; il est également invariant par translation le long de Oz, B ne dépend donc pas de z. Le champ $\vec{B}$ ne dépend donc que de la distance entre le point M étudié et le fil, notée r.

(Q.1.3) On a :



(Q.1.4) Le théorème d'Ampère s'énonce ainsi :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enl}$$

avec $\mathcal{C}$ le contour d'Ampère, contour fermé orienté s'appuyant sur le point où l'on cherche à calculer $\vec{B}$ en pratique, μ_0 est la perméabilité diamagnétique du vide, et I_{enl} le courant entouré/enlacé par le contour, compté positivement si son orientation respecte la règle de la main droite.

(Q.1.5) C'est le premier contour, le contour circulaire, qui est le plus adapté : suivant ce contour, le champ ne varie pas en norme, et il est dirigé suivant $\vec{u}_\theta$ comme le déplacement élémentaire du cercle.

(Q.1.6) Le long du contour, on calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} &= \oint_{\mathcal{C}} B(r) dl \\ &= B(r) \oint_{\mathcal{C}} dl \\ &= B(r) \times 2\pi r\end{aligned}$$

Le courant enlacé vaut I_0 et on obtient donc par application du théorème d'Ampère :

$$B(r)\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

(Q.1.7) Le courant traversant la surface du cylindre πR_0^2 est le même que précédemment, d'où : $I_0 = j_s \pi R_0^2$ soit :

$$\vec{j_s} = \frac{I_0}{\pi R_0^2}\vec{u}_z$$

(Q.1.8) Le champ à l'extérieur du câble s'exprime de la même façon dans les deux modèles car pour un point situe à l'extérieur, le courant enlacé sera le même dans les deux modèles, et donc le théorème d'Ampère aboutira au même résultat, qui s'exprime alors :

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_s R_0^2}{2r}$$

(Q.1.9) Si le point M est situé à l'intérieur du câble, l'étude des symétries et des invariances abouti au même résultat que précédemment. Par ailleurs, la circulation de $\vec{B}$ se calcule, le long d'un contour d'Ampère circulaire centré sur l'axe du câble et de rayon r, de la même façon. Seul le calcul du courant enlacé change. Le contour défini une surface de πr^2 et ainsi le courant enlacé vaut : $I_0 = j_s \pi r^2$, d'où par application du théorème d'Ampère :

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_s r}{2}$$

(Q.1.10) En $r = R_0$, le champ magnétique est bien continu : $B(R_0) = \frac{\mu_0 j_s R_0}{2}$ est le résultat obtenu avec la formule précédente ainsi qu'avec celle de la question 8.

Exercice 2 : Etude de quelques bobines

(Q.2.1) Si la longueur du solénoïde est très importante devant son rayon, et que l'on considère le champ magnétique loin des bords, la modélisation est pertinente.

(Q.2.2) On a : $n = N/\ell$.

(Q.2.3) La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe du solénoïde, ainsi que par rotation autour de ce même axe. Le champ magnétique ne dépend donc que de r, distance à l'axe. Par ailleurs, pour un point M donné, le plan passant par M et orthogonal à l'axe est plan de symétrie des courants. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan, ce qui impose au final :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$$

(Q.2.4) En utilisant le contour d'Ampère choisi par l'énoncé, on remarque que la circulation du champ est nulle sur les côtés orthogonaux à l'axe, d'après l'orientation connue du champ magnétique. Elle est également nulle sur le côté extérieur du cadre, car le champ magnétique y est supposé nul. Ainsi la circulation du champ suivant le côté intérieur s'écrit :

$$\int_A^B \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_A^B B(r)dl = B(r)L$$

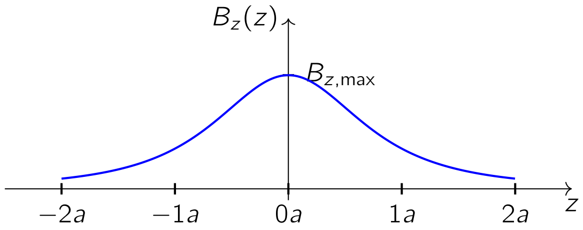
avec L la longueur du côté intérieur du cadre, choisie arbitrairement. On a par ailleurs $I_{enl} = nLI_0$ car le courant enlacé correspond à $N_{sp,enl}I_0$, à savoir le courant I_0 multiplié par le nombre de spires enlacées. Le théorème d'Ampère permet finalement d'écrire :

$$B(M)\vec{u}_z = \mu_0 n I_0 \vec{u}_z$$

(Q.2.5) Pour un point M situé sur l'axe, tout plan vertical contenant M est plan d'anti-symétrie des courants (vue du dessus se voit bien), donc le champ magnétique appartient à l'ensemble de ces plans. Il ne peut être que vertical.

(Q.2.6) Le plan d'équation $z = 0$ est un plan de symétrie des courants (tous contenus dedans !), c'est donc un plan d'anti-symétrie du champ magnétique. On aura alors $B_z(-z) = B_z(z)$: le champ étant vertical, la version antisymétrique du vecteur $\vec{B}$ est lui-même !

(Q.2.7) Le tracé est le suivant :



On a $B_{z,\max}$ quand $z = 0$ (le dénominateur est minimal), et vaut alors :

$$B_{z,\max} = \frac{\mu_0 N i}{2a}$$

On a par ailleurs $z_{1/2}$ telle que :

$$B_z(z_{1/2}) = \frac{\mu_0 N i a^2}{2\left(z_{1/2}^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N i}{4a}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{\left(z_{1/2}^2 + a^2\right)^{3/2}} &= \frac{1}{2a} \\
\left(z_{1/2}^2 + a^2\right)^{3/2} &= 2a^3 \\
z_{1/2}^2 + a^2 &= (2a^3)^{2/3} = 2^{2/3}a^2 \\
z_{1/2} &= \sqrt{(2^{2/3} - 1)}a \simeq 0,77a
\end{aligned}$$

(Q.2.8) Les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde, ce qui signifie que la norme du champ y est plus forte ; elles y sont approximativement parallèles, ce qui signifie que le champ y est à peu près constant.